Seminar 11
Transformarea Laplace — Aplicații
Transformarea Z

Ecuații și sisteme diferențiale

Folosind transformata Laplace, putem rezolva ecuații și sisteme diferențiale. Cu ajutorul proprietăților transformatei Laplace, aceste ecuații și sisteme devin *sisteme algebrice*, pe care le putem rezolva mult mai simplu.

Principalele avantaje ale rezolvării ecuațiilor și sistemelor diferențiale cu ajutorul transformatei Laplace sînt:

- rezolvarea unei ecuații neomogene se face *direct*, nu mai este necesar să se trateze cazul omogen mai întîi;
- valorile inițiale sînt folosite direct în calcul, nu se mai obține o soluție pînă la o constantă, care se determină din valorile inițiale.

Pentru aceasta, avem nevoie de o proprietate a transformatei Laplace aplicată derivatei originalului. Folosind definiția și integrarea prin părți, se pot verifica simplu următoarele proprietăți:

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$
$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0).$$

De fapt, în general, avem:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

De asemenea, pentru integrale, avem deja teorema integrării originalului:

$$\mathcal{L}\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{1}{s}F(s), \quad \text{unde } F(s) = \mathcal{L}f(t).$$

Rezultă, folosind transformarea inversă:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s}F(s)\Big).$$

De exemplu, pentru a rezolva ecuația diferențială:

$$y'' + ay' + by = r(t), \quad y(0) = K_0, y'(0) = K_1,$$

aplicăm transformata Laplace și folosim proprietățile de mai sus. Fie $Y = \mathcal{L}y(t)$

Se obține ecuația algebrică:

$$(s^2Y - sy(0) - y'(0)) + a(sY - y(0)) + bY = R(s),$$

unde $R(s) = \mathcal{L}r$. Forma echivalentă este:

$$(s^2 + as + b)Y = (s + a)y(0) + y'(0) + R(s).$$

Împărțim prin $s^2 + as + b$ și folosim formula:

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2}a)^2 + b - \frac{1}{4}a^2},$$

de unde rezultă:

$$Y(s) = \big((s + a)y(0) + y'(0)\big)Q(s) + R(s)Q(s).$$

În forma aceasta, descompunem $Y(s)$ în fracții simple, dacă este nevoie și folosim tabelul de transformate Laplace, pentru a afla $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$.

De exemplu:

$$y'' - y = t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Soluție: Aplicăm transformata Laplace și ajungem la ecuația:

$$\begin{aligned} s^2Y - sy(0) - y'(0) - Y &= \frac{1}{s^2} \\ (s^2 - 1)Y &= s + 1 + \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Rezultă $Q = \frac{1}{s^2-1}$ și ecuația devine:

$$\begin{aligned} Y &= (s+1)Q + \frac{1}{s^2}Q \\ &= \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2(s^2-1)} \\ &= \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Folosind tabelul și proprietățile transformatei Laplace, obținem soluția:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}Y \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{-1}}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\ &= e^t + \sinh t - t. \end{aligned}$$

Exerciții

1. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy, folosind transformata Laplace:

(a) $y'(t) + 2y(t) = 4t, y(0) = 1$;

(b) $y'(t) + y(t) = \sin 4t, y(0) = 0$;

(c) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$;

(d) $2y''(t) - 6y'(t) + 4y(t) = 3e^{3t}, y(0) = 1, y'(0) = -1$;

(e) $y''(t) - 2y(t) + y(t) = e^t, y(0) = -2, y'(0) = -3$;

(f) $y''(t) + 4y(t) = 3\cos^2(t), y(0) = 1, y'(0) = 2$.

2. Să se rezolve următoarele sisteme diferențiale:

(a) $\begin{cases} x' + x + 4y & = 10 \\ x - y' - y & = 0 \\ x(0) = 4, & y(0) = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' + x - y & = e^t \\ y' + y - x & = e^t \\ x(0) = 1, & y(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' + 2y' + x - y & = 5\sin t \\ 2x' + 3y' + x - y & = e^t \\ x(0) = 2, & y(0) = 1 \end{cases}$

Indicație: Aplicăm transformata Laplace fiecărei ecuații și notăm $\mathcal{L}x(t) = X(s)$ și $\mathcal{L}y(t) = Y(s)$. Apoi rezolvăm sistemul *algebric* obținut cu necunoscutele X și Y, cărora la final le aplicăm transformata Laplace inversă.

Transformata $\mathcal{Z}$

Definim acum o nouă transformată, dar de data aceasta pe un *caz discret*.

Definiţie 1: Se numește *semnal discret* o funcție $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, dată de $n \mapsto x_n$ (sau, echivalent, $x(n)$ ori $x[n]$).

Mulțimea semnalelor discrete se va nota cu S_d.

Dacă $x_n = 0$ pentru $n < 0$, spunem că semnalul are *suport pozitiv*, iar mulțimea lor se va nota cu S_d^+.

Un semnal particular este următorul: pentru $k \in \mathbb{Z}$ fixat, definim:

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}.$$

Acesta se numește *impulsul unitar discret* la momentul k și vom nota δ_0 cu δ simplu.

Cîteva noțiuni și operații specifice cu semnale urmează.

Definiţie 2: Fie $x \in S_d$ și $k \in \mathbb{Z}$ fixat arbitrar. Semnalul $y = (x_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ se numește *întîrziatul* lui x cu k momente.

Operația de *convoluție* o reîntîlnim și în cazul semnalelor discrete:

Definiţie 3: Fie $x, y \in S_d$. Dacă seria:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{n-k} y_k$$

este convergentă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ și are suma z_n, atunci semnalul $z = (z_n)_n$ se numește *convoluția* semnalelor x și y și se notează $z = x * y$.

Să remarcăm că, din definiție, avem pentru $x, y \in S_d^+$ existența $x * y$ și $x * y = y * x$. În plus, au loc:

$$x * \delta = x \quad \text{și} \quad (x * \delta_k)(n) = x_{n-k}.$$

Ajungem în fine la definiția principală:

Definiţie 4: Fie $s \in S_d$, cu $s = (a_n)_n$. Se numește *transformata* Z sau *transformata Laplace discretă* a acestui semnal funcția complexă definită prin:

$$L_s(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n},$$

care se definește în domeniul de convergență al seriei Laurent corespunzătoare.

Principalele proprietăți ale transformării Z sînt:

(1) Există $R, r > 0$ astfel încît seria care definește transformarea Z să fie convergentă în coroana $r < |z| < R$;

(2) **Liniaritatea:** Asocierea $s \mapsto L_s$ este $\mathbb{C}$-liniară și injectivă, deci:

$$L_{\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2}(z) = \alpha_1 L_{s_1}(z) + \alpha_2 L_{s_2}(z), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, s_1, s_2 \in S_d.$$

(3) Dacă $s \in S_d^+$, cu $s = (a_n)$, atunci $\lim_{z\to\infty} L_s(z) = a_0$, iar dacă există limita $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, atunci:

$$\lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} L_s(z) = 1.$$

(4) **Inversa transformării Z:** Fie $s \in S_d^+$, cu $s = (a_n)$. Presupunem că funcția $L_s(z)$ este olomorfă în domeniul $r < |z| < R$. Pentru orice $r < \rho < R$, fie γ_ρ frontiera discului $|z| \leqslant \rho$ parcursă în sens pozitiv o singură dată. Atunci avem:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} z^{n-1} L_s(z) dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(5) **Teorema de convoluție:** Fie $s, t \in S_d^+$. Atunci $s * t \in S_d^+$ și are loc:

$$L_{s*t} = L_s \cdot L_t.$$

În particular:

$$L_{s*\delta_k}(z) = z^{-k} L_s(z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(6) **Prima teoremă de întîrziere:** Pentru $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{L}_s(f(t-n)) = z^{-n}\mathcal{L}_s(f).$$

(7) **A doua teoremă de întîrziere (teorema de deplasare):**

$$\mathcal{L}_s(f(t+n)) = z^n \cdot \left(\mathcal{L}_s(f) - \sum_{t=0}^{n-1} f(t)z^{-t}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

În tabelul din figura 1 sînt prezentate transformatele Z ale funcțiilor uzuale.

s	L_s
$\begin{cases} h_n = 0, & n < 0 \\ h_n = 1, & n \geqslant 0 \end{cases}$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\delta_k, k \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{z^k}$
$s = (n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$s = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$s = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}, a \in \mathbb{C}$	$\dfrac{z}{z-a}$
$s = (e^{an})_{n\in\mathbb{N}}, a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z}{z-e^a}$
$s = (\sin(\omega n))_{n\in\mathbb{N}}, \omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
$s = (\cos(\omega n))_{n\in\mathbb{N}}, \omega \in \mathbb{R}$	$\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$

Figura 1: *Transformate* Z *uzuale*

Exerciții

1. Să se determine semnalul $x \in S_d^+$, a cărui transformată Z este dată de:

(a) $\mathcal{L}_s(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2}$;

(b) $\mathcal{L}_s(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$;

(c) $\mathcal{L}_s(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z^2+z-6)}$;

(d) $\mathcal{L}_s(z) = \dfrac{z}{z^2+2az+2a^2}$, $a >$ 0 parametru.

Soluție: (a) Avem:

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} z^{n-1} \mathcal{L}_s(z) dz \\
&= \operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 3) \\
&= \operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{(z-3)^2}, 3\right) \\
&= \lim_{z\to 3} \left((z-3)^2 \cdot \frac{z^n}{(z-3)^2}\right)' \\
&= \lim_{z\to 3} nz^{n-1} \\
&= n3^{n-1}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} z^{n-1} \mathcal{L}_s(z) dz \\
&= \operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 1) + \operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), i) + \operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), -i) \\
\operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 1) &= \lim_{z\to 1} z^{n-1} \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} \cdot (z-1) = \frac{1}{2} \\
\operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), i) &= \frac{i^n}{2i \cdot (i-1)} \\
\operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), -i) &= \frac{(-1)^n i^n}{2i(i+1)}.
\end{aligned}$$

Remarcăm că pentru $n = 4k$ și $n = 4k+1$, avem $x_n = 0$, iar în celelalte două cazuri, $x_n = 1$.

(c)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 1) &= \lim_{z\to 1} \left[z^{n-1} \cdot (z-1)^2 \cdot \frac{z^2}{(z-1)^2 \cdot (z^2+z-6)}\right]' \\
&= -\frac{4n+3}{16}. \\
\operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), 2) &= \frac{2^n}{5} \\
\operatorname{Rez}(z^{n-1}\mathcal{L}_s(z), -3) &= -\frac{(-3)^n}{80}.
\end{aligned}$$

Obținem $x_n = -\frac{4n+3}{16} + \frac{2^n}{5} - \frac{(-3)^n}{80}$.

(d) $z_{1,2} = a(-1 \pm i)$ sînt poli simpli. Avem:

$$\begin{aligned}
x_n &= \operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{(z^2+2a+2a^2)}, z_1\right) + \operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{(z^2+2a+2a^2)}, z_2\right) \\
&= \frac{a^n(-1+i)^n}{2z_1+2a} + \frac{a^n(-1-i)^n}{2z_1+2a} \\
&= -\frac{i}{2a}(z_1^n - z_2^n).
\end{aligned}$$

Putem scrie trigonometric numerele z_1 și z_2:

$$z_1 = a(-1+i) = a\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big)$$
$$z_2 = a(-1-i) = a\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\Big).$$

Deci: $x_n = 2^{\frac{n}{2}} a^{n-1} \sin\dfrac{3n\pi}{4}$. □

2. Fie $x = (x_n) \in S_d^+$ și $y = (y_n)$, unde $y_n = x_0 + \dots + x_n$. Să se arate că $Y(z) = \dfrac{z}{z-1}X(z)$.

Soluție: Avem $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n}$. Dar:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \text{ și } \sum_{n=0}^{\infty} x_{n-1} z^{n} = \frac{1}{z}X(z),$$

deoarece $x_{-1} = 0$. Putem continua și obținem $\sum_{n=0}^{\infty} x_{n-k} z^{-n} = \dfrac{1}{z^k}X(z)$. Așadar:

$$Y(z) = X(z)\cdot\Big(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\Big) = X(z)\cdot\frac{z}{z-1}.$$

□

3. Cu ajutorul transformării Z, să se determine șirurile (x_n) definite prin următoarele relații:

(a) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, n \in \mathbb{N}$ (șirul lui Fibonacci);

(b) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, n \in \mathbb{N}$;

(c) $x_0 = x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, x_{n+4} + 2x_{n+3} + 3x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, n \in \mathbb{N}$;

(d) $x_0 = 2, x_{n+1} + 3x_n = 1, n \in \mathbb{Z}$;

(e) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = (n+1)4^n, n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Abordarea generală este să considerăm șirul (x_n) ca fiind restricția unui semnal $x \in S_d^+$ la $\mathbb{N}$ și rescriem relațiile de recurență sub forma unor ecuații de convoluție $a * x = y$, pe care le rezolvăm în S_d^+.

(a) Fie $x \in S_d^+$, astfel încît restricția lui la $\mathbb{N}$ să fie șirul căutat. Deoarece avem:

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = y_n, n \in \mathbb{Z},$$

cu $y_n = 0$ pentru $n \neq -1$ și $y_{-1} = 1$, avem ecuația de convoluție:

$$a * x = y, \text{ unde } a = \delta_{-2} + \delta_{-1} + \delta, y = \delta_{-1}.$$

Aplicăm transformata Z și rezultă:

$$\mathcal{L}_s x(z)(z^2 - z - 1) = z \Longrightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

(b) Ca în cazul anterior, avem $a * x = y$, cu $a = \delta_{-2} - \delta_{-1} + \delta$, unde $y = \delta_{-1}$. Aplicînd transformata Z, obținem:

$$\mathcal{L}_s x(z)(z^2 - z + 1) = z \Longrightarrow \mathcal{L}_s x(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}.$$

Obținem:

$$x_n = \operatorname{Rez}\Big(z^{n-1}\frac{z}{z^2 - z + 1}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\Big) + \operatorname{Rez}\Big(z^{n-1}\frac{z}{z^2 - z + 1}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\Big).$$

Calculăm reziduurile, cu notația $\varepsilon = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $\overline{\varepsilon} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rez}\Big(\frac{z^n}{z^2 - z + 1}, \varepsilon\Big) &= \lim_{z \to \varepsilon} \frac{z^n}{z^2 - z + 1}(z - \varepsilon) \\
&= \frac{\varepsilon^n}{i\sqrt{3}} \\
&= \frac{\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}}{i\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Similar:

$$\operatorname{Rez}\Big(\frac{z^n}{z^2 - z + 1}, \overline{\varepsilon}\Big) = \frac{\cos\frac{2n\pi}{3} - i\sin\frac{2n\pi}{3}}{-i\sqrt{3}}.$$

Rezultă:

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{N}.$$

(c) Ecuația $a * x = y$ este valabilă pentru:

$$a = \delta_{-4} + 2\delta_{-3} + 3\delta_{-2} + 2\delta_{-1} + \delta, \quad y = -\delta_{-2} - 2\delta_{-1}.$$

Aplicăm transformata Z și obținem: $\mathcal{L}_s x(z) = -\dfrac{z(z+2)}{(z^2 + z + 1)^2}$. Descompunem în fracții simple, calculăm reziduurile și ținem cont de faptul că rădăcinile numitorului, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sînt poli de ordinul 2, obținem:

$$x_n = \frac{(2n - 4)(\varepsilon_1^n - \varepsilon_2^n) - (n+1)(\varepsilon_1^{n-1} + \varepsilon_1^{n-2} - \varepsilon_2^{n-1} - \varepsilon_2^{n-2})}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^3} = \frac{2(n-1)}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{N}.$$

(d) Ecuația corespunzătoare este $a * x = y$, cu $a = \delta_{-1} + 3\delta$ și $y_n = 1, \forall n \geqslant 1$, iar $y_{-1} = x_0 + 3x_{-1} = 2$, cu $y_n = 0, \forall n \leqslant -2$, adică $y = 1 + 2\delta_{-1}$.

Așadar:

$$\delta_{-1} * x + 3\delta * x = 1 + 2\delta_{-1}.$$

Aplicăm transformata Z și obținem:

$$\begin{aligned}
z\mathcal{L}_s x(z) + 3\mathcal{L}_s x(z) &= \frac{z}{z-1} + 2z \\
&= \frac{2z^2+3z}{z-1} \\
\Longrightarrow \mathcal{L}_s x(z) &= \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)} \\
\Longrightarrow x_n &= \text{Rez}(z^{n-1}\cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}, 1) + \text{Rez}(z^{n-1}\cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}, -3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Rez}(z^{n-1}\cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}, 1) &= \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot z^{n-1}\cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)} = \frac{5}{4} \\
\text{Rez}(z^{n-1}\cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)}, -3) &= \lim_{z\to -3}(z+3)z^{n-1}\cdot \frac{2z^2+3z}{(z-1)(z+3)} \\
&= (-3)^{n-1}\cdot \frac{12}{-4} = -3\cdot(-3)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Rezultă: $x_n = \frac{5}{4} - 3\cdot(-3)^{n-1}$.

(e) Avem ecuația: $a * x = y$, unde $a = \delta_{-2} - 4\delta_{-1} + 3\delta$, cu $y_n = 0, \forall n \leqslant -2, y_{-1} = 1$ și $y_n = (n+1)4^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Fie $s_1 = (n4^n)_n, s_2 = (4^n)_n$. Atunci:

$$\mathcal{L}_s s_1(z) = -z\mathcal{L}_s s_2'(z) = -z\big(\frac{z}{z-4}\big)' = \frac{4z}{(z-4)^2}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \mathcal{L}_s x(z)(z^2-4z+3) &= \frac{4z}{(z-4)^2} + \frac{z}{z-4} + z \\
&= \frac{z^2}{(z-4)^2} + z \\
\Longrightarrow \mathcal{L}_s x(z) &= \frac{z(z^2-7z+16)}{(z-4)^2(z-1)(z-3)}.
\end{aligned}$$

Descompunem în fracții simple și obținem, în fine:

$$x_n = \frac{1}{9}\big[18\cdot 3^n + (3n-13)4^n - 5\big], n \in \mathbb{N}.$$

□

OBSERVAȚIE: Toate exercițiile cu recurențe se mai pot rezolva în alte două moduri:

(1) Se poate aplica teorema de convoluție relației de recurență. De exemplu, din recurența:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2$$

putem obține:

$$Z(x_{n+2}) - 2Z(x_{n+1}) + Z(x_n) = 2Z(1),$$

iar $Z(x_{n+2}) = Z(x_n * \delta_{-2}) = Z(x_n)\cdot Z(\delta_{-2})$ etc.

(2) Se poate aplica teorema de deplasare. În aceeași recurență de mai sus, de exemplu, avem:

$$Z(x_{n+2}) = z^n\Big(Z(x_n) - x_0 - x_1 z^{-1}\Big)$$

și la fel pentru celelalte.