Seminar 11
Transformarea Laplace

Noțiuni teoretice

Transformata Laplace este tot o transformare integrală, ca și transformata Fourier. Aplicațiile sale de interes vor fi în rezolvarea ecuațiilor și sistemelor diferențiale. Astfel, cu ajutorul transformatei Laplace, vom putea aduce o ecuație sau sistem diferențial la un caz algebric, iar apoi să recuperăm funcțiile inițiale aplicînd transformata Laplace inversă.

Transformatele Laplace se aplică unor funcții speciale, care se numesc *funcții original*, definite mai jos.

Definiţie 1: O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numește *original* (Laplace) dacă îndeplinește condițiile:

(a) $f(t) = 0$, pentru orice $t < 0$;

(b) f este continuă (eventual pe porțiuni) în intervalul $[0, \infty)$;

(c) Există $M > 0$ și $s_0 \geqslant 0$ astfel încît

$$|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}, \forall t \geqslant 0.$$

Vom nota cu $\mathcal{O}$ mulțimea funcțiilor original (Laplace).

Prima condiție din definiție va fi utilă pentru interpretarea fizică, în teoria semnalelor. Într-adevăr, dacă privim $f(t)$ ca un semnal dependent de timp, este normal să cerem ca $f(t) = 0$ pentru $t < 0$. A doua și a treia condiție vor fi utile pentru dezvoltarea teoriei matematice, cu ajutorul calculului integral. A treia condiție se mai numește condiția de *creștere exponențială de indice* s_0. Ajungem acum la definiția principală.

Definiţie 2: Fie $f \in \mathcal{O}$, de indice s_0 și mulțimea:

$$S(s_0) = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > s_0\}.$$

Funcția:

$$F : S(s_0) \to \mathbb{C}, \quad F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

se numește *transformata Laplace* a lui f sau *imaginea Laplace* a originalului f. Vom mai folosi notația $F = \mathcal{L}f$ sau, echivalent, $\mathcal{L}f(t) = F(s)$.

Conform definiției, să remarcăm că transformata Laplace are drept domeniu $\mathcal{O}$, iar imaginea este o submulțime a lui $\mathbb{C}$.

Principalele proprietăți ale transformatei Laplace, care ne vor ajuta în rezolvarea de probleme, sînt redate mai jos.

Liniaritate:

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{L} f(t) + \beta \mathcal{L} g(t).$$

Teorema asemănării:

$$\mathcal{L} f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

Teorema deplasării:

$$\mathcal{L}\left(f(t) e^{s_0 t}\right) = F(s - s_0).$$

Teorema întîrzierii: Dacă $f \in \mathcal{O}$ și $\mathcal{L} f(t) = F(s)$, atunci pentru orice $\tau > 0$, transformata Laplace a întîrziatei:

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ f(t - \tau), & t \geqslant \tau \end{cases}$$

este $e^{-st} F(s)$.

Teorema derivării imaginii:

$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right) = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

Teorema integrării originalului: Dacă $f \in \mathcal{O}, \mathcal{L} f(t) = F(s)$ și $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, atunci:

$$\mathcal{L} g(t) = \frac{1}{s} F(s).$$

Teorema integrării imaginii: Fie $\mathcal{L} f(t) = F(s)$ și G o primitivă a lui F în semiplanul $S(s_0)$, cu $G(\infty) = 0$. Atunci:

$$\mathcal{L} \frac{f(t)}{t} = -G(s).$$

Tabel de transformate Laplace

În tabelul de mai jos, vom considera funcțiile $f(t)$ ca fiind funcții original, adică nule pentru argument negativ. Echivalent, putem gîndi $f(t)$ ca fiind, de fapt, înmulțite cu funcția lui Heaviside:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t-\tau)$	$\frac{1}{s}e^{-\tau s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha^2)+\omega^2}$
$\ln t$	$-\frac{1}{s}\left(\ln s + \gamma^{1}\right)$

Figura 1: *Transformatele Laplace uzuale*

[1] Constanta Euler-Mascheroni, $\gamma \simeq 0,577\cdots \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Exerciții

1. Să se arate că funcția:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} t^2 + t - 3, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

este o funcție original.

Soluție: Evident, f este nulă pentru argument negativ, deci prima condiție este verificată. De asemenea, deoarece f este o funcție elementară, avem și continuitatea (pe porțiuni).

Mai trebuie verificată creșterea exponențială, adică faptul că există $M > 0$ și $s_0 \geqslant 0$, cu $|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}$, pentru orice $t \geqslant 0$. Această inegalitate este evidentă, deoarece $|f(t)| \leqslant e^t$ pentru t suficient de mare, deci putem lua $s_0 = 1$, iar M convenabil ales pentru a satisface condiția.

2. Calculați transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = 1, t \geqslant 0;$

(b) $f(t) = t, t \geqslant 0;$

(c) $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N};$

(d) $f(t) = e^{at}, t \geqslant 0, a \in \mathbb{R};$

(e) $f(t) = \sin(at), t \geqslant 0, a \in \mathbb{R}.$

Soluție: (a) Avem direct din definiție:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^n e^{-st} dt = \frac{1}{s}, s > 0.$$

(b) Integrăm prin părți și obținem $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$.

(c) Facem substituția $st = \tau$ și găsim:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^n d\tau = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

pentru $s > 0$, folosind funcția Gamma a lui Euler:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, a > 0, \quad \Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}.$$

(d) $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{at}\, e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, s > a.$

(e) Integrăm prin părți și ajungem la:

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s) \Rightarrow F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0.$$

3. Folosind tabelul de valori și proprietățile, să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = 5$;

(b) $f(t) = 3t + 6t^2$;

(c) $f(t) = e^{-3t}$;

(d) $f(t) = 5e^{-3t}$;

(e) $f(t) = \cos(5t)$;

(f) $f(t) = \sin(3t)$;

(g) $f(t) = 3(t-1) + e^{-t-1}$;

(h) $f(t) = 3t^3(t-1) + e^{-5t}$;

(i) $f(t) = 5e^{-3t}\cos(5t)$;

(j) $f(t) = e^{2t}\sin(3t)$;

(k) $f(t) = te^{-t}\cos(4t)$;

(l) $f(t) = t^2\sin(3t)$;

(m) $f(t) = t^3\cos t$.

Indicații: În majoritatea cazurilor, se folosește tabelul și proprietatea de liniaritate. În plus:
(i, j) Folosim $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$;
(k) Folosim $\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t))$;
(l) Folosim $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$;

4. Folosind teorema derivării imaginii, să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = t$;

(b) $f(t) = t^2$;

(c) $f(t) = t\sin t$;

(d) $f(t) = te^t$.

Indicație: Conform proprietății de derivare a imaginii, avem:

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t)).$$

5. Folosind teorema integrării originalului, să se determine transformatele Laplace pentru funcțiile (presupuse original):

(a) $f(t) = \int_0^t \cos(2\tau)d\tau$;

(b) $f(t) = \int_0^t e^{3\tau} \cos(2\tau) d\tau$;

(c) $f(t) = \int_0^t \tau e^{-3\tau} d\tau$.

Indicație: Conform proprietății de integrare a originalului, avem:

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{F(s)}{s}.$$