Seminar 1
Ecuații diferențiale de ordin superior

1 Ecuații rezolvabile prin cuadraturi

Dacă ecuația are forma generală $y^{(n)} = f(x)$, atunci ea se rezolvă prin n integrări succesive și soluția generală depinde de n constante arbitrare.

Exemplu 1:

$$y'' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{6}.$$

Soluție: Integrăm succesiv și obținem:

$$\begin{aligned} y' &= x \arcsin x - \frac{\pi}{6}x + c_1 \\ y &= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\arcsin x - \frac{\pi}{12}x^2 + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

Exemplu 2:

$$y''' = \sin x + \cos x.$$

Indicație: Ecuația se rezolvă prin integrări succesive.

2 Ecuații de forma $f(x, y^{(n)}) = 0$

În această situație, distingem două cazuri:

(a) Dacă ecuația poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, adică dacă $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, atunci obținem una sau mai multe ecuații ca în secțiunea anterioară;

(b) Dacă ecuația $f(x, y^{(n)}) = 0$ nu este rezolvabilă cu ajutorul funcțiilor elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaștem o reprezentare parametrică a curbei $f(u, v) = 0$, anume $u = g(t), v = h(t)$, cu $t \in [\alpha, \beta]$, atunci soluția generală poate fi obținută sub formă parametrică:

$$x = g(t), \quad dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = h(t)g'(t)dt,$$

de unde putem obține succesiv:

$$\begin{cases} y^{(n-1)} &= h_1(t, c_1) \\ \ldots\ldots \\ y(t) &= h_n(t, c_1, \ldots, c_n). \end{cases}$$

De exemplu:

$$x - e^{y''} + y'' = 0.$$

Soluție: Putem nota $y'' = t$ și obținem $x(t) = e^t - t$. Deoarece $dy' = y''dx$, rezultă:

$$dy' = t(e^t - 1)dt \Rightarrow y' = -\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + c_1.$$

Dar, mai departe, $dy = y'dx$, deci:

$$dy = \Big(-\frac{t^2}{2} + te^t - e^t + c_1\Big)(e^t - 1)dt.$$

În fine, soluția este:

$$y(t) = e^{2t}\Big(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\Big) + e^t\Big(-\frac{t^2}{2} + 1 + c_1\Big) + \frac{t^3}{6} - c_1 t + c_2.$$

3 Ecuații de forma $f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

Distingem două cazuri:

(a) Dacă ecuația este rezolvabilă prin funcții elementare în raport cu $y^{(n)}$, atunci notînd $z = y^{(n-1)}$, obținem $z' = f(z)$. Ecuația este cu variabile separabile și se rezolvă corespunzător, conducînd la $z = y^{(n-1)} = f_1(x, c_1)$, care este de tipul anterior;

(b) Dacă ecuația nu este rezolvabilă prin funcții elementare în raport cu $y^{(n)}$, dar cunoaștem o reprezentare parametrică de forma:

$$y^{(n-1)} = h(t), \quad y^{(n)} = g(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

atunci putem folosi relația $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, pentru a obține soluția sub formă parametrică:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{h'}{g} dt + c_1 \\ y^{(n-1)} &= h(t) \\ dy^{(n-2)} &= h(t) = \frac{hh'}{g} dt \\ y^{(n-2)} &= \int \frac{hh'}{g} dt + c_2 \\ &\vdots \\ y &= \int y' dx + c_n. \end{aligned}$$

Exemplu: $y'' = -\sqrt{1 - y'^2}$.
Soluție: Facem schimbarea de funcție $z(x) = y'$ și ecuația diferențială devine:

$$-\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = dx, \quad |z| < 1.$$

Soluția generală este $\arccos z = x + c_1$, de unde $z = \cos(x + c_1)$.

Obținem mai departe $y(x) = \sin(x + c_1) + c_2$.

De asemenea, remarcăm și soluțiile particulare $y = \pm x + c$.

4 Ecuații diferențiale de forma $f(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

Ecuația se rezolvă făcînd schimbarea de funcție $y^{(k)} = z(x)$ și obținem o ecuație de ordin $n - k$:

$$f(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0,$$

pe care o integrăm.

Exemplu: $(1 + x^2)y'' = 2xy'$.

Soluție: Cu schimbarea de funcție $y' = z(x)$, obținem ecuația:

$$\frac{z'}{z} = \frac{2x}{1+x^2},$$

iar apoi, prin integrare, avem $z = y' = c_1(1+x^2)$. Rezultă, în fine:

$$y(x) = c_1 x + c_1 \frac{x^3}{3} + c_2.$$

Exemplu: $y \cdot y'' - 2y'^2 = 0$.

Soluție: Notăm $y' = z$ și obținem:

$$y(y'z + yz') - 2y^2z^2 = y^2(z^2 + z') - 2y^2z^2 = 0,$$

de unde avem $y = 0$ sau $z' - z^2 = 0$.

Din a doua variantă, deducem succesiv:

$$\frac{dz}{z^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + c_1.$$

Revenind la $y(x)$, avem:

$$-\frac{y}{y'} = x + c_1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x+c_1} \Rightarrow y(x) = \frac{c_2}{x+c_1}.$$

5 Ecuații de forma $f(y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

Să remarcăm că aceste tipuri de ecuații nu conțin pe y. Așadar, putem lua y' ca variabilă independentă și pe y'' ca funcție de y'.

De exemplu: $x^2y'' = y'^2 - 2xy' + 2x^2$.

Soluție: Facem schimbarea de funcție $y' = z(x)$ și obținem o ecuație Riccati:

$$z' = \frac{z^2}{x^2} - 2\frac{z}{x} + 2.$$

Observăm soluția particulară $z_p = x$ și integrăm punînd $z = x + \frac{1}{u(x)}$.

Obținem succesiv:

$$z(x) = x + \frac{c_1 x}{x+c_1} \Rightarrow y'(x) = x + \frac{c_1 x}{x+c_1}.$$

În fine, soluția este:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c_1 x - c_1^2 \ln|x + c_1| + c_2.$$

6 Ecuații autonome (ce nu conțin pe x)

În cazul acestor ecuații, putem micșora ordinul cu o unitate dacă notăm $y' = p$ și luăm pe y variabilă independentă.

Observaţie 6.1: Există posibilitatea să pierdem soluții de forma $y = c$ prin această metodă, deci trebuie verificat ulterior dacă a fost cazul.

Exemplu 1: $1 + y'^2 = 2yy'$.
Soluție: Luăm $y' = p$ drept funcție și pe y drept variabilă independentă. Obținem:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = p\frac{dp}{dy}.$$

Atunci ecuația devine $\frac{2p\,dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$, ce are drept soluție $y = c_1(1 + p^2)$.

Acum trebuie să obținem pe x ca funcție de p și c_1. Deoarece $dx = \frac{1}{p}dy$, iar $dy = 2c_1 p\,dp$, rezultă $dx = 2c_1 dp$. Așadar, $x = 2c_1 p + c_2$, iar soluția generală este $x(p) = 2c_1 p + c_2$. Cum $y(p) = c_1(1 + p^2)$, rezultă:

$$y = c_1 + \frac{(x - c_2)^2}{4c_1}.$$

Exemplu 2: $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.
Soluție: Notăm $y' = p$ și luăm ca necunoscută $p = p(y)$, de unde obținem:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = p'p \Rightarrow p'p + p^2 = 2e^{-y}.$$

Dacă notăm $p^2 = z$, obținem o ecuație liniară neomogenă:

$$z' + 2z = 4e^{-y},$$

ce are ca soluție generală $z(y) = c_1 e^{-2y} + 4e^{-y}$. Revenind la y, avem:

$$z = p^2 = y'^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{c_1 e^{-2y} + 4e^{-y}},$$

adică ecuația:

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{c_1 e^{2y} + 4e^{-y}}} = dx,$$

ce are ca soluție: $x + c_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{c_1 + 4e^y}$. Echivalent, în forma implicită:

$$e^y + \frac{c_1}{4} = (x + c_2)^2.$$

Similar putem proceda și în cazul:

$$y''' + y'' = \sin x.$$

Indicație: Putem nota $y'' = z$ și atunci ecuația devine:

$$z' + z = \sin x,$$

care este o ecuație liniară neomogenă, cu soluția:

$$z(x) = e^{-x}\left(c_1 + \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right).$$

Mai departe, integrăm succesiv:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int z(x)dx + c_2 = -c_1 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + c_2 \\ y(x) &= \int y'(x)dx + c_3 = c_1 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + c_2 x + c_3. \end{aligned}$$

7 Ecuații liniare de ordinul n cu coeficienți constanți

Forma generală este:

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

cu $a_i \in \mathbb{R}$ constante.

Dacă avem $f(x) = 0$, atunci ecuația se numește *omogenă*.

Avem o metodă algebrică de a rezolva această ecuație, folosind:

Definiţie 7.1: Se numește *polinomul caracteristic* atașat ecuației omogene $L[y] = 0$ polinomul:

$$F(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n,$$

iar $F(r) = 0$ se numește *ecuația caracteristică* atașată ecuației diferențiale.

Folosind această noțiune, putem rezolva direct ecuația, ținînd seama de următoarele cazuri posibile:

Teoremă 7.1: *(1) Dacă ecuația caracteristică $F(r) = 0$ are rădăcini reale și distincte r_i, atunci un sistem fundamental de soluții este dat de:*

$$\left\{ y_i(x) = e^{r_i x} \right\}_{i=1,\dots,n}.$$

(2) Dacă printre rădăcinile lui $F(r)$ există și rădăcini multiple, de exemplu r_1, cu ordinul de multiplicitate p, atunci pentru această rădăcină avem p soluții liniar independente (pe lîngă celelalte):

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = x e^{r_1 x}, \dots, y_p(x) = x^{p-1} e^{r_1 x}.$$

(3) Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice avem și rădăcini complexe, de exemplu $r = a + ib$ și $\overline{r} = a - ib$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate îi corespund două soluții liniar independente (pe lîngă celelalte):

$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx, \quad y_2(x) = e^{ax} \sin bx.$$

(4) Dacă ecuația caracteristică are rădăcini complexe ca mai sus, cu ordinul de multiplicitate p, atunci lor le corespund $2p$ soluții liniar independente:

$$\left\{ y_j(x) = x^{j-1} e^{ax} \cos bx \right\}_{j=1,\dots p}, \quad \left\{ y_k(x) = x^{k-p-1} e^{ax} \sin bx \right\}_{k=p+1,\dots,2p}.$$

De exemplu: $y'' - y = 0$, cu condițiile $y(0) = 2$ și $y'(0) = 0$.

Soluție: Ecuația caracteristică este $r^2 - 1 = 0$, deci $r_{1,2} = \pm 1$. Sîntem în primul caz al teoremei, deci un sistem fundamental de soluții este:

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad , y_2(x) = e^x.$$

Soluția generală este $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$.

Folosind condițiile Cauchy, obținem $c_1 = c_2 = 1$, deci soluția particulară este:

$$y(x) = e^{-x} + e^x.$$

Observaţie 7.1: Dacă ecuația inițială $L[y] = f(x)$ *nu* este omogenă, putem rezolva folosind *metoda variației constantelor (Lagrange)*.

În acest caz, metoda variației constantelor presupune următoarele etape. Fie ecuația neomogenă scrisă în forma:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Pentru simplitate, vom presupune $n = 2$ și fie o soluție particulară de forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2.$$

Atunci, prin metoda variației constantelor, vom determina funcțiile $c_1(x), c_2(x)$ ca soluții ale sistemului algebric:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 &= 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' &= \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

De exemplu: $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

Soluție: Asociem ecuația omogenă, care are ecuația caracteristică $r^2 + 3r + 2 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = -1, r_2 = -2$. Așadar, soluția generală a ecuației omogene este:

$$\overline{y}(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.$$

Determinăm o soluție particulară $y_p(x)$ cu ajutorul metodei variației constantelor. Mai precis, căutăm:

$$y_p(x) = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}.$$

Înlocuind în ecuația neomogenă, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} &= 0 \\ -c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} &= \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

Rezolvînd ca pe un sistem algebric, obținem:

$$c_1'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{1+e^x},$$

de unde obținem:

$$c_1(x) = \ln(1+e^x), \quad c_2(x) = -e^x + \ln(1+e^x).$$

În fine, înlocuim în soluția particulară y_p și apoi în cea generală, $y(x) = \overline{y}(x) + y_p(x)$.

Un alt exemplu: $y'' - y = 4e^x$.

Soluție: Ecuația caracteristică $r^2 - 1$ are rădăcinile $r_{1,2} = \pm 1$, deci soluția generală a ecuației liniare omogene este $y_0(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$.

Căutăm acum o soluție particulară a ecuației neomogene, folosind metoda variației constantelor. Așadar, căutăm $y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}$. Din condiția ca y_p să verifice ecuația liniară neomogenă, obținem sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = 4e^x \end{cases}$$

Rezultă $c_1'(x)e^x = 2e^x$, deci $c_1'(x) = 2 \Rightarrow c_1(x) = 2x$, iar $c_2'(x)e^{-x} = -2e^x$, deci $c_2(x) = -e^{2x}$.

În fine, soluția particulară este $y_p(x) = 2xe^x - e^x$, iar soluția generală:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^x(2x-1).$$

8 Metoda eliminării pentru sisteme diferențiale liniare

Putem reduce sistemele diferențiale de ordinul I la ecuații de ordin superior.

De exemplu, să pornim cu sistemul:

$$\begin{cases} x' + 5x + y & = 7e^t - 27 \\ y' - 2x + 3y & = -3e^t + 12 \end{cases}$$

Soluție: Din prima ecuație, scoatem y și derivăm:

$$y = 7e^t - 27 - 5x - x' \Rightarrow y' = 7e^t - 5 - x''.$$

Înlocuim în a doua ecuație și obținem o ecuație liniară de ordin superior:

$$x'' + 8x' + 17x = 31e^t - 93.$$

Ecuația caracteristică este $r^2 + 8r + 17 = 0$, cu rădăcinile $r_{1,2} = -4 \pm i$. Atunci soluția generală a ecuației omogene este:

$$\overline{x}(t) = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Mai departe, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene folosind metoda variației constantelor, a lui Lagrange:

$$x_p(t) = e^{-4t}(c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t).$$

Determinăm funcțiile $c_1(t), c_2(t)$ din sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t e^{-4t} + c_2'(t) \sin t e^{-4t} & = 0 \\ c_1'(t)(-\sin t e^{-4t} - 4 \cos t e^{-4t}) + c_2'(t)(\cos t e^{-4t} - 4 \sin t e^{-4t}) & = 31e^t - 93. \end{cases}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} & c_1'(t) = -31 \sin t e^{5t} + 93 \sin t e^{4t} \\ \Rightarrow & c_1(t) = -\frac{31}{26} e^{5t}(5 \sin t - \cos t) + \frac{93}{17} e^{4t}(4 \sin t - \cos t) \\ & c_2'(t) = 31 \cos t e^{5t} - 93 \cos t e^{4t} \\ \Rightarrow & c_2(t) = \frac{31}{26} e^{5t}(5 \sin t + \cos t) - \frac{93}{17} e^{4t}(4 \sin t + \cos t). \end{aligned}$$

În fine, obținem:

$$x(t) = e^{-4t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + \frac{31}{26} e^t - \frac{93}{17},$$

iar mai departe:

$$y(t) = e^{-4t}[(c_1 - c_2) \sin t - (c_1(t) - c_2) \cos t) - \frac{2}{13} e^t + \frac{6}{17}.$$

Alt exemplu:

$$\begin{cases} y_1' & = -y_2 + 1 \\ x^2 y_2' & = -2y_1 + x^2 \ln x \end{cases}$$

Soluție: Derivăm prima ecuație și obținem $y_2' = -y_1''$. Înlocuim în a doua ecuație și obținem:

$$x^2 y_1'' - 2y_1 = -x^2 \ln x,$$

care este o ecuație Euler. Îi asociem o ecuație omogenă $x^2y_1'' - 2y_1 = 0$. Facem schimbarea $x = e^t$ și obținem $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$. Ecuația caracteristică asociată este $r^2 - r - 2 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = 2$ și $r_2 = -1$. Atunci soluția generală este:

$$\begin{cases} \overline{y}_1(t) & = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ \overline{y}_1(x) & = c_1x^2 + c_2\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene cu metoda variației constantelor, deci:

$$y_{1p}(x) = c_1(x)x^2 + c_2(x)\frac{1}{x}.$$

Determinăm funcțiile $c_1(x), c_2(x)$ din sistemul:

$$\begin{cases} c_1'(x)x^2 + c_2'(x)\frac{1}{x} & = 0 \\ 2xc_1'(x) - c_2'(x)\frac{1}{x^2} & = \frac{-x^2\ln x}{x^2} \end{cases}$$

Atunci $c_1'(x) = -\frac{\ln x}{3x^3}$, iar $c_2'(x) = \frac{\ln x}{3}$. Așadar:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{6x^2}\ln x + \frac{1}{6x}\ln x + \frac{1}{6x} \\ c_2(x) &= \frac{1}{3}(x\ln x - x). \end{aligned}$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} y_{1p}(x) &= \frac{1}{6}x\ln x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \\ y_1(x) &= c_1x^2 + c_2\frac{1}{x} + \frac{1}{6}x\ln x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{x}{6} - \frac{1}{3} \\ y_2(x) &= 1 - y_1' = \frac{1}{6}\ln x - 2c_1x - c_2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$