Seminar 7
Integrale de suprafață. Formule integrale

1 Integrale de suprafață

Integralele de suprafață sînt analogul celor curbilinii, dar, în locul unei curbe în lungul căreia se face integrarea, ne vom baza pe o suprafață din $\mathbb{R}^3$.

Tot ca în cazul integralelor curbilinii, integralele de suprafață sînt de două tipuri.

Integrala de suprafață de speța întîi are forma și se calculează după formula:

$$\iint_\Sigma \mathcal{F}(x,y,z)d\sigma = \iint_D \mathcal{F}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

unde Σ este suprafața pe care integrăm, care devine domeniul D după aplicarea formulei, cu elementul de arie $d\sigma$, care devine $dudv$, fiecare dintre cele trei coordonate x, y, z fiind parametrizate după u și v, iar coeficienții E, F, G se calculează astfel:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

O definiție alternativă este următoarea. Fie $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată și fie $\Sigma = \Phi(D)$ imaginea ei, iar $F : U \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe imaginea pînzei. Integrala de suprafață a lui F pe Σ este, prin definiție:

$$\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma = \iint_D F(\Phi(u,v))\cdot\left|\left|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\times\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right|\right|dudv.$$

Într-un caz particular, în care suprafața regulată Σ este dată sub o formă explicită $z = f(x,y)$, cu $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, atunci formula se simplifică și devine:

$$\iint_\Sigma \mathcal{F}(x,y,z)d\sigma = \iint_D \mathcal{F}(x,y,f(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy,$$

unde coeficienții au forma simplificată:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Alte cazuri particulare sînt:

(a) Pentru $F = 1$, obținem *aria suprafeței* Σ;

(b) Dacă $F \geqslant 0$ este densitatea unei plăci Σ, atunci *masa ei* se calculează prin $M = \int_\Sigma F d\sigma$, iar *coordonatele centrului de greutate*: $x_i^G = \frac{1}{M}\int_\Sigma x_i F d\sigma$.

Într-o **interpretare vectorială**, putem considera $\vec{F}$ un cîmp vectorial, atunci *fluxul* său prin suprafața Σ este dat de o integrală de suprafață de prima speță, cu forma:

$$\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma,$$

unde $\vec{n}$ este vectorul normal la suprafață, calculat prin $\vec{n} = \frac{\nabla F}{||\nabla F||}$, iar $d\sigma$ este elementul de suprafață.

Dacă avem cîmpul vectorial dat parametric, atunci formula pentru flux devine:

$$\Phi_\Sigma(\vec{F}) = \iint_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) dS,$$

unde $\vec{T}_u, \vec{T}_v$ sînt vectorii tangenți după cele două direcții, calculați ca derivatele parțiale F_u și F_v, iar dS este elementul de arie, adică $dudv$.

Pentru **integralele de suprafață de speța a doua**, considerăm o 2-formă diferențială:

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

și luăm o pînză parametrizată:

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)).$$

Integrala pe suprafața orientată Σ a formei diferențiale ω este definită prin:

$$\int_\Sigma \omega = \iint_D \left((P \circ \Phi) \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + (Q \circ \Phi) \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + (R \circ \Phi) \frac{D(X,Y)}{D(u,v)} \right) dudv,$$

unde $\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}$ etc. sînt jacobienii funcțiilor X, Y, Z în raport cu variabilele u, v.

Într-o formă simplificată, dacă privim $\vec{n} = \frac{\nabla \Phi}{||\nabla \Phi||}$, iar $\Phi = (X, Y, Z)$, atunci putem scrie:

$$\iint_\Sigma \omega = \iint_D \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} dudv,$$

unde am folosit notația simplificată pentru derivate parțiale, i.e. $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ etc.

2 Exerciții

1. În fiecare din exemplele următoare, considerăm:

$$D \ni (u,v) \mapsto \Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$$

o pînză parametrizată. Să se calculeze vectorii tangenți la suprafață și versorul normalei la suprafață.

(a) *Sfera*: Fie $R > 0$ și $\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(\theta, \varphi) = (R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R \cos\theta);$$

(b) *Paraboloidul*: Fie $a > 0, h > 0$ și $\Phi : [0, h] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u,v) = (au \cos v, au \sin v u^2);$$

(c) *Elipsoidul*: Fie $a, b, c > 0$ și $\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(\theta, \varphi) = (a \sin\theta \cos\varphi, b \sin\theta \sin\varphi, c \cos\theta);$$

(d) *Conul*: Fie $h > 0, \Phi : [0, 2\pi) \times [0, h] \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u,v) = (v \cos u, v \sin u, v);$$

(e) *Cilindrul*: Fie $a > 0, 0 \leqslant h_1 \leqslant h_2, \Phi : [0, 2\pi) \times [h_1, h_2] \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(\varphi, z) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, z);$$

(f) *Torul*: Fie $0 < a < b, \Phi[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u).$$

Indicație: Vectorii tangenți la suprafață sînt $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ și $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$, iar versorul normalei este:

$$\frac{1}{\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\|} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

2. Fie $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ o 2-formă diferențială, iar Σ, imaginea unei pînze parametrizate. Să se calculeze integrala de suprafață $\int_\Sigma \omega$ în cazurile:

(a) $\omega = y dy \wedge dz + z dz \wedge dx + x dx \wedge dy$, unde:

$$\Sigma : \begin{cases} X(u, v) &= u\cos v \\ Y(u, v) &= u\sin v \\ Z(u, v) &= cv \end{cases}$$

cu domeniul $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi)$;

(b) $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, unde:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

(c) $\omega = yz dy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy$, unde:

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

(d) $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx$, unde:

$$\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, \quad z \in [1, 2];$$

(e) $\omega = (y + z) dy \wedge dz + (x + y) dx \wedge dy$, unde:

$$\Sigma : x^2 + y^2 = a^2, \quad a \in [0, 1]$$

3. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță:

$$\iint_\Sigma F(x, y, z) d\sigma$$

în următoarele cazuri:

(a) $F(x, y, z) = |xyz|$, iar $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1]$;

(b) $F(x, y, z) = y\sqrt{z}$, iar $\Sigma : x^2 + y^2 = 6z, z \in [0, 2]$;

(c) $F(x, y, z) = z^2$, iar $\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 - 6y \leqslant 0\}$.

4. Folosind integralele de suprafață, să se calculeze ariile suprafețelor:

(a) sfera de rază R;

(b) conul $z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, h]$;

(c) paraboloidul $z = x^2 + y^2, z \in [0, h]$.

5. Să se calculeze aria suprafeței Σ în următoarele cazuri:

(a) $\Sigma : 2z = 4 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]$;

(b) Σ este submulțimea de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, situată în interiorul conului $x^2 + y^2 = z^2$;

(c) Σ este submulțimea de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - Ry = 0$;

(d) Σ este submulțimea de pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 2y$.

6. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial $\vec{V}$ prin suprafața Σ în următoarele cazuri:

(a) $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, iar $\Sigma : z^2 = x^2 + y^2$, cu $z \in [0, 1]$;

(b) $\vec{V} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$, iar $\Sigma : z = x^2 + y^2$, cu $z \in [0, 1]$;

(c) $\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k})$, iar $\Sigma : z = 4 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]$.

3 Formula Green-Riemann

Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat inclus în $\mathbb{R}^2$ și considerăm o 1-formă diferențială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K. Atunci are loc *formula Green-Riemann*:

$$\int_{\partial K} P dx + Q dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

O consecință imediată este o formulă pentru arie:

$$\mathcal{A}(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} x dy - y dx.$$

4 Formula Gauss-Ostrogradski

Considerăm K o mulțime compactă, cu bord orientat după normala exterioară. Atunci, pentru orice 2-formă diferențială:

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K are loc egalitatea:

$$\int_{\partial K} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_K \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

În notație vectorială, dacă $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ este cîmpul vectorial asociat 2-formei diferențiale ω, atunci formula de mai sus poate fi scrisă:

$$\int_{\partial K} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_K \operatorname{div} \vec{V} dx dy dz,$$

unde $\vec{n}$ este normala exterioară la ∂K. În membrul stîng avem fluxul cîmpului $\vec{V}$ prin suprafața ∂K, motiv pentru care formula Gauss-Ostrogradski se mai numește *formula flux-divergență*.

5 Formula lui Stokes

Fie Σ o suprafață cu bord, orientată și fie:

$$\alpha = P dx + Q dy + R dz$$

o 1-formă diferențială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui Σ. Atunci are loc formula:

$$\int_{\partial\Sigma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

În notație vectorială, dacă $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ este cîmpul vectorial asociat formei diferențiale α, atunci formula lui Stokes se scrie:

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma,$$

unde $\nabla \times \vec{V} = \text{rot}\vec{V}$ se numește *rotorul* cîmpului vectorial $\vec{V}$, calculat cu ajutorul produsului vectorial.

6 Exerciții

1. Să se calculeze direct și folosind formula Green-Riemann integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$ în următoarele cazuri:

(a) $\alpha = y^2 dx + x dy$, unde Γ este pătratul cu vîrfurile $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$;

(b) $\alpha = y dx + x^2 dy$, unde Γ este cercul cu centrul în origine și rază 2;

(c) $\alpha = y dx - x dy$, unde Γ este elipsa de semiaxe a și b și de centru O.

2. Să se calculeze integralele, direct, apoi aplicînd formula Green-Riemann:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}(-y dx + x dy)$, unde $\Gamma = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$;

(b) $\displaystyle\int_\Gamma xy dx + \frac{x^2}{2} dy$, unde Γ este obținută prin:

$$\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1, x \leqslant 0 \leqslant y\} \cup \{x + y = -1, x, y \leqslant 0\}.$$

3. Să se calculeze circulația cîmpului vectorial $\vec{V}$ pe curba Γ în cazurile:

(a) $\vec{V} = y^2\vec{i} + xy\vec{j}$, unde:

$$\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \cup \{y = x^2 - 1, y \leqslant 0\};$$

(b) $\vec{V} = e^x \cos y\vec{i} - e^x \sin y\vec{j}$, unde Γ este o curbă arbitrară din semiplanul superior, ce unește punctele $A(1,0), B(-1,0)$, cu sensul de la A către B.

4. Să se calculeze integrala de suprafață $\int_\Sigma \omega$ în următoarele cazuri:

(a) $\omega = x^2 dy \wedge dz - 2xy dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$, iar mulțimea $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$;

(b) $\omega = yzdy \wedge dz - (x+z)dz \wedge dx + (x^2+y^2+3z)dx \wedge dy$, iar mulțimea:

$$\Sigma = \{x^2+y^2 = 4-2z, z \geqslant 1\} \cup \{x^2+y^2 \leqslant 4-2z, z = 1\};$$

(c) $\omega = x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z+z^2)dx \wedge dy$, iar mulțimea:

$$\Sigma = \{x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0\}.$$

5. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$, în următoarele cazuri:

(a) $\alpha = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, iar mulțimea $\Gamma : z = x^2+y^2, z = 1$;

(b) $\alpha = ydx + zdy + xdz$, iar mulțimea:

$$\Gamma : x^2+y^2+z^2 = 1, \quad x+y+z = 0.$$

6. Să se calculeze circulația cîmpului vectorial:

$$\vec{V} = (y^2+z^2)\vec{i} + (x^2+z^2)\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k},$$

pe curba $\Gamma : x^2+y^2+z^2 = R^2, ax+by+cz = 0$.