Seminar 6
Extreme cu legături. Integrale improprii

1 Extreme condiționate

Atunci cînd domeniul de definiție al unei funcții de mai multe variabile conține, la rîndul său anumite ecuații (numite, generic, *legături*, problemele de extrem se studiază folosind **metoda multiplicatorilor Lagrange**. Ea se bazează pe următoarele concepte:

Definiţie 1.1: Fie $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, cu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, iar $f : U \to \mathbb{R}$ o funcție de $n + m$ variabile reale, cu valori reale, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe un deschis $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Ea se numește *funcție-scop (obiectiv)*. Presupunem că există m legături între variabilele $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, adică m relații de forma:

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad g_i : U \to \mathbb{R},$$

fiecare legătură fiind o funcție de clasă $\mathcal{C}^1(U)$.

Fie $M = \{(x, y) \in U \mid g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}$ mulțimea punctelor din U care verifică legăturile.

Se numește *punct de extrem local al funcției* f *cu legăturile* g_i orice punct $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in M$, pentru care există o vecinătate $W \subseteq U$, astfel încît diferența $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ să aibă semn constant pentru orice $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M \cap W$.

Teorema pe care se bazează metoda multiplicatorilor lui Lagrange este:

Teoremă 1.1 (J. L. Lagrange)**:** *Cu notațiile și contextul de mai sus, presupunem că* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *este un punct de extrem local al lui* f*, cu legăturile de mai sus și că*

$$\det J_g(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \xlongequal{\text{not.}} \frac{D(g_1, \dots, g_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Atunci există m *numere reale* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$*, numite* multiplicatori Lagrange *astfel încît, dacă definim funcția:*

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m,$$

punctul $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *să verifice în mod necesar sistemul de* $n + 2m$ *ecuații:*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0, g_l = 0, \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant l \leqslant m,$$

cu $n + 2m$ *necunoscute,* $\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Exemplu: Să se determine extremele locale ale funcției $f(x, y, z) = xyz$, cu legătura $x + y + z = 1$.
Soluție: Folosim metoda multiplicatorilor Lagrange. Definim funcțiile:

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x + y + z - 1 \\ F(x, y, z) &= f + \lambda g = xyz + \lambda(x + y + z - 1). \end{aligned}$$

Extremele cerute verifică sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \\ g &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz + \lambda &= 0 \\ xz + \lambda &= 0 \\ xy + \lambda &= 0 \\ x + y + z - 1 &= 0 \end{cases}$$

Soluția sistemului este dată de:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{9} \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x_2, y_2, z_2) & = (1, 0, 0) \\ (x_3, y_3, z_3) & = (0, 1, 0) \\ (x_4, y_4, z_4) & = (0, 0, 1) \end{cases}$$

În continuare, studiem natura punctelor de extrem pentru funcția F, fie cu matricea hessiană, fie cu diferențiala totală de ordin 2.

Găsim că (x_1, y_1, z_1) este maxim local, iar celelalte puncte nu sînt de extrem.

2 Integrale improprii. Criterii de convergență

Integralele improprii reprezintă cazul în care funcția care se integrează nu este mărginită la cel puțin unul dintre capetele domeniului de integrare.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție *local integrabilă* (i.e. integrabilă pe orice interval compact $[u, v] \subseteq [a, b)$).

Integrala improprie (în b) $\int_a^b f(x)dx$ se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este valoarea integralei. În caz contrar, integrala se numește *divergentă*.

Dacă $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ este local integrabilă, atunci integrala improprie (la ∞) $\int_a^\infty f(x)dx$ se numește *convergentă* dacă limita:

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

există și este finită. Valoarea limitei este egală cu valoarea integralei.

Integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ se numește *absolut convergentă* dacă integrala $\int_a^b |f(x)|dx$ este convergentă.

Criteriile de convergență pentru integralele improprii sînt foarte asemănătoare cu cele pentru serii (amintiți-vă, că, de fapt, integralele definite se construiesc cu ajutorul sumelor infinite, adică serii, v. *sumele Riemann*).

Așadar, avem:

Criteriul lui Cauchy (general): Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă. Atunci integrala $\int_a^b f(t)dt$ este convergentă dacă și numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in [a, b) \text{ a.î. } \forall x, y \in (b_\varepsilon, b), \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Criteriul de comparație („termen cu termen"): Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ astfel încît $0 \leqslant f \leqslant g$.

- Dacă $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci și integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă, atunci și integrala $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație la limită: Fie $f, g : [a, b) \to [0, \infty)$, astfel încît să existe limita:

$$\ell = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Dacă $\ell \in [0, \infty)$, iar $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\ell \in (0, \infty)$ sau $\ell = \infty$, iar $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă, atunci și $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{x^\alpha}$: Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ local integrabilă, astfel încît să existe:

$$\ell = \lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x).$$

- Dacă $\alpha > 1$ și $0 \leqslant \ell < \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\alpha \leqslant 1$, iar $0 < \ell \leqslant \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație cu $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$: Fie $a < b$ și $f : [a, b) \to [0, \infty)$, local integrabilă, astfel încît să existe:

$$\ell = \lim_{x \to b} (b - x)^\alpha f(x).$$

- Dacă $\alpha < 1$ și $0 \leqslant \ell < \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă;
- Dacă $\alpha \geqslant 1$ și $0 < \ell \leqslant \infty$, atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

Criteriul lui Abel: Fie $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, cu proprietățile:

- f este de clasă $\mathcal{C}^1$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, iar $\int_a^\infty f'(x)dx$ este absolut convergentă;
- g este continuă, iar $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ este mărginită pe $[a, \infty)$.

Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ este convergentă.

3 Integrale cu parametri

Fie $A \neq \emptyset$ și $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un interval compact. Considerăm funcția $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$, astfel încît, pentru orice $y \in A$, funcția $[a, b] \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ să fie integrabilă Riemann.

Funcția definită prin:

$$F : A \to \mathbb{R}, \quad F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

se numește *integrală cu parametru*.

Proprietățile pe care le vom utiliza sînt cele de mai jos.

Continuitate: Dacă $f : [a, b] \times A \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci integrala cu parametru $F(y)$ definită mai sus este funcție continuă.

Formula de derivare (Leibniz): Fie $f : [a, b] \times (c, d) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încît derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există și este continuă pe $[a, b] \times (c, d)$. Atunci integrala cu parametru $F(y)$ definită mai sus este derivabilă și are loc:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \forall y \in (c, d).$$

Formula generală de derivare: Dacă $f : [a, b] \times (c, d) \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, astfel încît derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial y}$ să existe și să fie continuă pe $[a, b] \times (c, d)$, definim $\varphi, \psi : (c, d) \to [a, b)$ două funcții de clasă $\mathcal{C}^1$.

Atunci funcția $G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$ este derivabilă și are loc formula de derivare:

$$G'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx + f(\varphi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y), \forall y \in (c, d).$$

Schimbarea ordinii de integrare: Dacă $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci are loc:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

4 Integrale improprii cu parametri

Putem considera acum integrale improprii, definite cu parametri, astfel. Luăm o funcție $f : [a, b) \times A \to \mathbb{R}$, astfel încît pentru orice $y \in A$, aplicația $[a, b) \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă și integrala $\int_a^b f(x, y)dx$ converge. Atunci putem defini funcția:

$$F(x, y) = \int_a^b f(x, y)dx,$$

care se numește *integrală improprie cu parametru*.

Definiţie 4.1: Integrala $F(x, y)$ de mai sus se numește *uniform convergentă* (UC) (în raport cu y) pe mulțimea A dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in (a, b) \text{ a.î. } \left| \int_t^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon, \forall t \in (b_\varepsilon, b), \forall y \in A.$$

Pentru aceste integrale, se pot adapta proprietățile integralelor cu parametri din secțiunea anterioară:

Continuitate: Dacă $f : [a, b) \times A \to \mathbb{R}$ este continuă, iar integrala $\int_a^b f(x, y)dx$ este UC pe A, atunci funcția $F(x, y)$ definită mai sus este continuă.

Derivare: Fie $f : [a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încît derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există și este continuă pe $[a, b) \times (c, d)$ și pentru orice $y \in (c, d)$ fixat, integrala $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ este convergentă.

Dacă integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ este UC pe (c,d), atunci integrala improprie cu parametru $F(y)$ de mai sus este derivabilă și are loc:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx, \forall y \in (c,d).$$

Schimbarea ordinii de integrare: Dacă $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ este continuă și integrala $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este UC pe (c,d), atunci are loc:

$$\int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx \Big) dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy \Big) dx.$$

Criteriul de comparație pentru UC: Fie $f : [a,b) \times A \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că, pentru orice $y \in A$, aplicația $[a,b) \ni x \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă. Fie $g : [a,b) \to \mathbb{R}$, astfel încît $|f(x,y)| \leqslant g(x), \forall x \in [a,b), \forall y \in A$.

Dacă integrala $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă, atunci integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este UC.

4.1 Funcțiile lui Euler

Următoarele integrale improprii cu parametri se numesc *funcțiile lui Euler*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$$
$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, p > 0, q > 0.$$

Proprietățile lor, pe care le vom utiliza în calcule, sînt:

- $B(p,q) = B(q,p)$;
- $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$;
- $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$;
- $\Gamma(1) = 1$;
- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$;
- $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}$;
- $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$;
- $\Gamma\big(n + \frac{1}{2}\big) = (2n-1)!! \cdot 2^{-n} \cdot \sqrt{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}$;
- $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \forall \alpha \in (0,1)$.

5 Exerciții

1. Folosind criteriile de comparație, să se studieze natura integralelor improprii:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (D);

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (C);

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{1-x^2}dx$ (D);

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (C $x=1$, D $x\to\infty \Rightarrow$ D);

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}}dx$ (C);

(f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}dx$ (C $x\to\infty$, D $x=1 \Rightarrow$ D);

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}, \alpha>0$ (D);

2. Să se arate că integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Indicație: Pentru $x\to\infty$, convergența rezultă din criteriul lui Abel. Pentru $x=0$, putem prelungi funcția prin continuitate, deoarece limita sa este finită.

Pentru AC, se aplică criteriul de comparație.

3. Să se calculeze integralele, folosind derivarea sub integrală:

(a) $\displaystyle I(m)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x+m^2\sin^2 x)dx, m>0;$

(b) $\displaystyle I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx, |a|<1;$

Indicații:

(a) Derivăm în raport cu m sub integrală, apoi integrăm cu schimbarea de variabilă $\tan x=t$;

(b) Derivăm în raport cu a sub integrală și apoi integrăm cu schimbarea de variabilă $\tan\frac{x}{2}=t$.

4. Să se calculeze, folosind funcțiile Γ și B, integralele:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^p}dx, p>0;$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2}dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}dx;$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx, p > -1, q > -1;$

(e) $\int_0^1 x^{p+1}(1-x^m)^{q-1} dx, p, q, m > 0;$

(f) $\int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx, p > -1, q > 0;$

(g) $\int_0^1 \ln^p x^{-1} dx, p > -1;$

(h) $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}, n \in \mathbb{N}.$

Indicații:

(a) Facem schimbarea de variabilă $x^p = y$ și obținem $\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)$;

(b) Folosind proprietățile, obținem $B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$, pe care îl scriem în funcție de Γ. Răspuns: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

(c) Facem schimbarea de variabilă $x^3 = y$ și găsim $\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

(d) Facem schimbarea de variabilă $\sin^2 x = y$ și scriem în funcție de B;

(e) $x^m = y$ și scriem în funcție de B

(f) $x^q = y$ și scriem în funcție de Γ;

(g) $\ln x^{-1} = y$ și scriem în funcție de Γ;

(h) $x^n = y$ și scriem în funcție de B.

5. Să se determine extremele funcțiilor f, cu legătura g în cazurile:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1, g(x, y) = x + y - 2;$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1, g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1;$

(c) $f(x, y) = 3x + 4y, g(x, y) = x^2 + y^2 + 25.$

6. Să se găsească punctul din planul $2x + y - z = 5$, situat la distanță minimă față de origine.

7. Să se determine punctele cele mai depărtate de origine care se află pe suprafața de ecuație $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4 = 0$.

8. Să se determine valorile extreme ale funcției:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2,$$

pe mulțimea $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

9. Să se determine valorile extreme ale produsului xy, cînd x și y sînt coordonatele unui punct de pe elipsa de ecuație $x^2 + 2y^2 = 1$.