Seminar 8
Extremele funcțiilor de mai multe variabile
Metoda celor mai mici pătrate.

1 Extreme în mai multe dimensiuni

Pornim cu următoarea:

Definiţie 1.1: Fie $f : A \to \mathbb{R}$, cu $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Un punct $a \in A$ se numește *punct critic* pentru f dacă f este diferențiabilă în a și $df(a) = 0$, adică $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$, pentru orice $k = 1, \dots, n$.

Rezultă de aici că punctele de extrem local ale lui f sînt printre soluțiile sistemului:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}_k .$$

În studiul naturii punctelor critice pentru o funcție f, pașii de urmat sînt:

(1) Se determină punctele critice, din anularea derivatelor parțiale;

(2) Fie a un punct critic. Se calculează matricea hessiană corespunzătoare, adică $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}$;

(3) Se calculează valorile proprii ale lui H:

   (a) Dacă toate valorile proprii sînt pozitive, a este un minim local;

   (b) Dacă toate sînt negative, a este un maxim local;

   (c) Dacă valorile proprii nu au semn uniform, a nu este de extrem;

   (d) Dacă 0 este valoare proprie, nu se poate decide. Astfel, se dezvoltă în serie Taylor a lui f în jurul lui a, de unde se calculează semnul diferenței $f(x) - f(a)$.

Pentru cazul bidimensional ($n = 2$), avem o metodă simplificată:

(1) Se determină punctele de extrem din sistemul:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

(2) Fie $a = (a_1, a_2)$ un asemenea punct critic. Calculăm numerele:

$$r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2)$$
$$s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2)$$
$$t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2).$$

Observăm că avem:

$$d^2 f(a_1, a_2) = r_0 dx^2 + 2 s_0 dx dy + t_0 dy^2.$$

   (a) Dacă $r_0 > 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, atunci a e punct de minim local;

   (b) Dacă $r_0 < 0$ și $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, atunci a e punct de maxim local;

(c) Dacă $r_0 t_0 < 0$, atunci a nu este punct de extrem local;

(d) Dacă $r_0 t_0 - s_0^2$, atunci studiem semnul $f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2)$ prin dezvoltare în serie Taylor.

Dezvoltarea în serie Taylor pentru o funcție de două variabile reale în jurul punctului $a = (x_0, y_0)$ este dată de formula:

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(a) &+ \frac{1}{1!}\Big[(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big] \\
&+ \frac{1}{2!}\Big[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\Big] + \\
&+ \frac{1}{3!}\Big[(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a) + 3(x-x_0)^2(y-y_0)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a) + 3(x-x_0)(y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a) + (y-y_0)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a) \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Observaţie 1.1: În cazul în care se impun constrîngeri pentru domeniul de definiție a funcției, se studiază separat problema punctelor de extrem în interiorul domeniului, precum și pe frontieră.

2 Exerciții

1. Fie funcția:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y + 3.$$

Determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte.

2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \geqslant 5\}$, determinați valoarea minimă și maximă a funcției.

Indicație (b): Considerați funcțiile $g_1(x) = f(x,0), g_2 = f(0,y)$ și apoi funcția $g_3 = f(x, 5-x)$, cărora le găsiți punctele de extrem.

3. Fie $f : D \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = [-4, 4] \times [-3, 3]$ determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

Indicație (b): Considerați funcțiile $f(x, -3), f(4, y), f(x, 3), f(-4, y)$.

4. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = [-1, 2] \times [0, 2]$, determinați valoarea minimă și maximă a funcției.

5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$.

(a) Pentru $D = \mathbb{R}^2$, determinați punctele de extrem și calculați valorile funcției în aceste puncte;

(b) Pentru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, 3y + x \leqslant 3\}$ determinați valoarea minimă și valoarea maximă a funcției.

6. Determinați valorile extreme pentru funcțiile f, definite pe domeniile D, unde:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy, D = \mathbb{R}^2$;

(b) $f(x, y) = xy(1 - x - y), D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2, D = (-\infty, 0) \times (0, \infty)$;

(d) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 2xy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0, y + 2x \leqslant 2\}$;

(e) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

7*. Dintre toate paralelipipedele dreptunghice cu volum constant 1, determinați pe cel cu aria totală minimă.