Seminar 4
Serii Fourier și recapitulare

1 Serii Fourier

Pentru dezvoltarea în serie Fourier (care se poate aplica atunci cînd seriile Taylor sînt imposibile), trebuie satisfăcute *condițiile Dirichlet*:

(D1) Funcția trebuie să fie periodică;

(D2) Funcția trebuie să aibă un număr finit de discontinuități;

(D3) Funcția trebuie să aibă un număr finit de extreme într-o perioadă;

(D4) $\int_0^T |f(x)|\, dx$ trebuie să fie convergentă.

Convențional, seria se scrie:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[a_r \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) + b_r \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) \right],$$

unde a_r, b_r, a_0 sînt *coeficienții Fourier*, iar L este perioada.

Coeficienții se calculează:

$$a_r = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx$$
$$b_r = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx.$$

De obicei, se ia $x_0 = 0$ sau $x_0 = -L/2$.

Teoremă 1.1 (Parseval)**:**

$$\frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} |f(x)|^2 dx = \sum_{r=-\infty}^{\infty} |c_r|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} (a_r^2 + b_r^2).$$

De exemplu, putem calcula $\sum r^{-4}$.

Luăm funcția $f(x) = x^2$ și calculăm media funcției $f^2(x)$ pe $-2 < x \leqslant 2$:

$$\frac{1}{4} \int_{-2}^{2} x^4 dx = \frac{16}{5}.$$

Acum calculăm membrul drept din Parseval:

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} (a_r^2 + b_r^2) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{r \geqslant 1} \frac{16^2}{\pi^4 r^4}.$$

Egalăm cele două expresii și obținem $\sum_{r \geqslant 1} \frac{1}{r^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Folosind forma polară a unui număr complex și formula lui Euler, putem scrie seria:

$$\widehat{f} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt, n \geqslant 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt, n \geqslant 1.$$

Lemă 1.1 (Riemann)**:** *Dacă* f *este integrabilă, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Teoremă 1.2 (Dirichlet)**:** *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcție periodică, de perioadă* 2π*, măsurabilă, mărginită, avînd cel mult un număr finit de discontinuități de spețа întîi și cu derivate laterale în orice punct, atunci seria Fourier converge în fiecare punct* $x \in \mathbb{R}$ *la:*

$$\frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big).$$

În particular, dacă f *este chiar continuă, are loc:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

1.1 Exerciții

Să se dezvolte în serie Fourier:

1. $f(x) = x$, pe $(-\pi, \pi)$.
Soluție: Funcția este impară, deci $a_k = 0, \forall k \geqslant 0$, iar:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx dx = \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k}, k > 0.$$

Egalitatea se obține ținînd cont că $\sin k\pi = 0, \cos k\pi = (-1)^k$.

Deci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem:

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, avem:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

2. $f(x) = \pi^2 - x^2$, pe $(-\pi, \pi)$.
Soluție: Funcția este pară, deci $b_k = 0, \forall k > 0$ și:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) dx = \frac{4\pi^2}{3} \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - x^2) \cos kx dx \\ &= \frac{4 \cdot (-1)^{k-1}}{k^2}, k > 0. \end{aligned}$$

Deci:

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cos kx.$$

Sînt îndeplinite condițiile din teorema Dirichlet, deci descompunerea este valabilă pentru $x \in [-\pi, \pi]$.

În particular, dacă $x = \pi$, avem formula:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.
$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in (-\pi, 0) \\ bx, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Coeficienții:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi}{2}(b-a) \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} ax\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} bx\cos nx dx\Big) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} ax\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{x} ax\sin nx dx\Big) \end{aligned}$$

Rezultă, prin calcule (integrare prin părți):

$$a_k = \frac{a-b}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k^2}, \quad b_k = (a+b)\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Observație: Putem folosi această dezvoltare pentru a calcula suma seriei numerice $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$, care este convergentă.

Funcția f este continuă pentru $t = 0$ și, din Dirichlet, suma seriei Fourier în punctul $t = 0$ este egală cu $f(0)$. Obținem:

$$0 = f(0) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Rezultă $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, pe $(-\pi, \pi)$.
Soluție: Coeficienții:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \frac{2}{a\pi}\sinh a\pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx dx \\ &= (-1)^n\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2a}{a^2+n^2}\sinh a\pi \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx dx \\ &= (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2n}{a^2+n^2}\sinh a\pi. \end{aligned}$$

Rezultă:
$$e^{ax} = \frac{2\pi}{\sinh}a\pi\cdot\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\cdot(a\cos nx - n\sin nx)\right].$$

5. $f(x) = |x|$, pe $[-\pi, \pi]$.

Soluție: Funcția este pară, deci $b_n = 0, \forall n \geqslant 1$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1].$$

Rezultă:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

6. Să se dezvolte în serie de sinusuri funcția $f(x) = \frac{|x|}{x}$, definită în intervalul $(0,1)$.
Soluție: Prelungim funcția impar față de origine:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < 1 < 1 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Calculăm coeficienții Fourier ai acestei funcții periodice impare, definite pe $(-1,1)$:

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \forall n \geqslant 0 \\ b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{1}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2n+1} & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \end{aligned}$$

Rezultă:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi x}{1}.$$

Observație: 1 poate fi înlocuit cu l, orice perioadă aleasă.

7. Să se demonstreze formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi).$$

Soluție: Considerăm funcția $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in [0, 2\pi]$, prelungită prin periodicitate la $\mathbb{R}$. Calculăm coeficienții Fourier:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0;\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nx dx\\
&= \frac{\pi - x}{\sin nx}2n\pi\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx = 0, \forall n \geqslant 1\\
b_n &= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nx dx\\
&= \frac{-(\pi - x)\cos nx}{2n\pi}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx\\
&= \frac{1}{n}, \forall n \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Aplicăm acum teorema lui Dirichlet și obținem:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi).$$

Pentru $x = 0, 2\pi$, funcția nu este continuă. Seria trigonometrică asociată are suma 0.

2 Exerciții recapitulative

Serii numerice:

1. Decideți convergența următoarelor serii cu termenul general dat de:

(a) $x_n = \frac{n!}{n^{2n}}$ (C, raport);

(b) $x_n = \left(1 - \frac{3\ln n}{2n}\right)^n$ (C, logaritmic);

(c) $x_n = \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$ (D, logaritmic);

(d) $x_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$ (C, integral);

(e) $x_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ (D, comparație $\sim \frac{1}{n}$);

(f) $x_n = a^{\ln n}, a > 0$ (discuție, Raabe);

(g) $x_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$ (D, Leibniz + armonică);

(h) $x_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$ (C, logaritmic).

Calcul aproximativ de sume de serii:

2. Calculați cu eroare ε sumele seriilor:

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}$ (n = 7);

(b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3\sqrt{n}}, \varepsilon = 10^{-2}$ (n = 4);

Șiruri de funcții:

3. Studiați convergența punctuală și convergența uniformă pentru șirurile de funcții:

(a) $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$;

(b) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1 - x^n)$;

(c) $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$;

(d) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$;

(e) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \arctan(nx)$.

4. Verificați dacă șirul de funcții poate fi integrat termen cu termen:

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Arătați, deci, că:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

5. Verificați dacă șirul de funcții poate fi derivat termen cu termen:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan x^n.$$

Arătați, deci, că:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1).$$

Serii Taylor

6. Să se dezvolte în serie Maclaurin următoarele funcții, precizînd și domeniul de convergență:

(a) $f(x) = e^x$;

(b) $f(x) = \sin x$;

(c) $f(x) = \cos x$;

(d) $f(x) = \ln(1 + x)$;

(e) $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

(f) $f(x) = \arctan x$.

7. Calculați, cu ajutorul seriilor Taylor, cu o eroare de 10^{-3}:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1 + x)}{x} dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\sin x}{x} dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\arctan x}{x} dx$.

Serii de puteri:

8. Găsiți raza de convergență și domeniul de convergență pentru seriile:

(a) $\sum x^n$;

(b) $\sum n^n x^n$;

(c) $\sum \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Serii de funcții:

9. Studiați convergența seriilor de funcții:

(a) $\sum \frac{nx}{1+n^5x^2}, x \in \mathbb{R}$; (Weierstrass);

(b) $\sum \arctan \frac{2x}{x^2+n^4}, x \in \mathbb{R}$; (Weierstrass);

(c) $\sum \frac{\sin nx}{2^n}, x \in \mathbb{R}$; (Weierstrass);

(d) $\sum \left(\sin \frac{x}{n+1} - \sin \frac{x}{n} \right)$; (șirul sumelor parțiale);

(e) $x + \sum \left(\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x} \right), 0 \leqslant x \leqslant 1$; (șirul sumelor parțiale).