Seminar 2
Serii de puteri și serii de funcții

1 Serii de puteri

1.1 Raza de convergență

Definiție 1.1: Fie (a_n) un șir de numere complexe și $a \in \mathbb{C}$.
Se numește *serie de puteri centrată în* a cu coeficienți $\{a_n\}$ o serie de funcții de forma:

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \ldots.$$

O astfel de serie se mai numește *serie întreagă* în z, în jurul $z = a$.

Seriile de puteri sînt convergente pe un interval (sau bilă, în general) de forma $(-R, R)$, unde R se numește *raza de convergență*.

Fie $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ o serie de puteri. Raza sa de convergență se poate calcula în mai multe moduri, de exemplu:

- **Cauchy-Hadamard:**
$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$
Aceasta derivă din **criteriul rădăcinii**: seria converge dacă $C < 1$ și diverge dacă $C > 1$, unde:
$$C = \limsup \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|}.$$
Rezultă că seria este convergentă dacă distanța de la x la centrul a este mai mică decît R, calculat cu formula de mai sus.

- Se mai poate folosi **criteriul raportului**. Cînd există limita corespunzătoare, se poate arăta că ea este egală cu raza de convergență:
$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$
Aceasta se obține din faptul că testul raportului spune că seria este convergentă dacă:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|a_n(x-a)^n|} < 1.$$

Presupunem acum că există și este unic $R \in [0, \infty]$.

1. $R = 0 \Rightarrow$ singurul punct de convergență este $z = a$;
2. $0 < R < \infty \Rightarrow$ absolut convergentă în $|z-a| < R$ și divergentă în rest. În plus, convergentă pe $K \subseteq B(a, R)$;
3. $R = \infty \Rightarrow$ absolut convergentă $\forall z \in \mathbb{C}$ și uniform convergentă pe orice compact $K \subseteq \mathbb{C}$.

1.2 Seria Taylor

Definiţie 1.2: Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^∞ pe $[a, b]$ și $x_0 \in (a, b)$.

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

este *seria Taylor a lui* f *în jurul* x_0.

Definiţie 1.3: Spunem că șirul de funcții (f_n) *converge uniform* la f pe E dacă pentru orice ε, există N_ε, independent de x, astfel încît $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E, n \geqslant N_\varepsilon$.

Spunem că șirul *converge punctual* la f dacă există $N_{x,\varepsilon}$, care depinde și de x, și de ε, astfel încît $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pentru orice $n \geqslant N_{\varepsilon,x}$.

Evident, convergența uniformă implică pe cea punctuală.

Teoremă 1.1: *Dacă* $\forall n \geqslant 0, \forall x \in [a, b], f^{(n)}(x) \leqslant M$, *atunci seria Taylor este uniform convergentă pe* $[a, b]$ *și are suma* f. *Adică:*

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \forall x \in [a, b].$$

Definiţie 1.4: Funcția $f : A \to \mathbb{R}$ s.n. $\mathbb{R}$-*analitică* în $a \in A$ dacă are o dezvoltare în serie de puteri în jurul lui a.

Observaţie 1.1: $\mathbb{R}$-analitică în vecinătatea lui $a \Rightarrow$ indefinit derivabilă, $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \forall n \geqslant 0$.

Reciproc, fals: $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

(a) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

(b) $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$;

(c) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$;

(d) $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o(x^n),\ \forall x \in (-1, 1)$;

(e) $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),\ \forall x \in (-1, 1)$;

(f) $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n),\ \forall x \in (-1, 1)$.

2 Serii de funcții

Definiţie 2.1: Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții, cu $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că șirul este *punctual convergent pe* $[a, b]$ *către* f pentru $n \to \infty$ și scriem $f_n \xrightarrow{PC} f$ dacă $f_n(x_0) \to f(x_0)$ în $\mathbb{R}$, pentru orice $x \in [a, b]$.

Definiţie 2.2: Un șir de funcții $(f_n)_n$, cu $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numește *uniform convergent pe* $[a, b]$ *către o funcție* f, scris $f_n \xrightarrow{UC} f$, dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geqslant N_\varepsilon, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b].$$

Teoremă 2.1: *(a) Un șir* (f_n) *de funcții mărginite* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este uniform convergent către o funcție* $f \in M$ *dacă și numai dacă* $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$.

(b) Orice șir de funcții $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uniform convergent pe $[a,b]$ este punctual convergent pe $[a,b]$. Reciproca este falsă.

De exemplu, să luăm $[a,b] = [0,1]$ și $f_n(x) = x^n, n \geqslant 1$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Rezultă că $f_n \xrightarrow{PC} f$, unde:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Dar:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= \max_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \max(\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(1) - f(1)|) \\ &= \max(\sup_{x\in[0,1)} x^n, 0) \\ &= 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Așadar, șirul este PC, dar nu este UC pe $[0,1]$.

Teoremă 2.2 (Cauchy): *Șirul de funcții $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniform pe mulțimea A dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încît $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$ avem $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$.*

Teoremă 2.3: *Fie $(f_n)_n$ un șir uniform convergent de funcții continue, cu $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Atunci limita $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ este o funcție continuă pe $[a,b]$. În plus, avem:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Teoremă 2.4: *Fie (f_n) un șir de funcții din $C^1([a,b])$ și f, g funcții mărginite, cu $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă $f_n \xrightarrow{PC} f$ și $f'_n \xrightarrow{UC} g$ pe $[a,b]$, atunci f este derivabilă pe $[a,b]$ și $f' = g$.*

Teoremă 2.5 (Dini): *Fie (f_n) un șir monoton de funcții continue, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, astfel încît $f_n \xrightarrow{PC} f$. Atunci $f_n \xrightarrow{UC} f$.*

Teoremă 2.6 (Polya): *Fie (f_n) un șir de funcții monotone $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ și $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă astfel încît $f_n \xrightarrow{PC} f$.*

Atunci $f_n \xrightarrow{UC} f$.

Teoremă 2.7 (Stone-Weierstrass): *Pentru orice funcție continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, există un șir (f_n) de polinoame, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, astfel încît $f_n \xrightarrow{UC} f$.*

Definiţie 2.3: Mulțimea valorilor lui x pentru care seria $\sum_n f_n(x)$ este convergentă se numește *mulțimea de convergență* a seriei.

Funcția $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, astfel încît $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, cu $S_n(x) = \sum_i f_i(x)$ se numește *suma seriei.*

Definiţie 2.4: Seria $\sum_n f_n$ este *simplu (punctual) convergentă* către funcția f dacă șirul sumelor parțiale $(S_n(x))_n$ este simplu (punctual) convergent către f.

Seria este *uniform convergentă* către funcția f dacă șirul sumelor parțiale $(S_n(x))_n$ este uniform convergent către f.

Seria este *absolut convergentă* dacă seria modulelor este simplu convergentă.

Teoremă 2.8: *Fie $\sum_n f_n$ o serie uniform convergentă de funcții continue, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ și s suma acestei serii. Atunci s este o funcție continuă pe $[a, b]$.*

În plus, $\int_a^b s(x)dx = \sum_n \int_a^b f_n dx$.

Teoremă 2.9: *Fie $\sum_n f_n$ o serie PC de funcții din $C^1([a, b])$, cu suma s pe $[a, b]$ și astfel încît seria derivatelor $\sum_n f'_n$ să fie UC.*

Atunci funcția s este derivabilă pe $[a, b]$ și $s' = \sum_n f'_n$.

Teoremă 2.10 (Weierstrass)**:** *Fie $\sum_n f_n$, cu $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ o serie de funcții și $\sum_n a_n$ o serie convergentă de numere reale pozitive. Dacă $|f_n(x)| \leqslant a_n$, pentru orice $x \in [a, b]$ și pentru $n \geqslant N$, cu N fixat, atunci seria de funcții $\sum_n f_n$ este UC pe $[a, b]$.*

Teoremă 2.11 (UC, Cauchy)**:** *Seria $\sum_n f_n$ este uniform convergentă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît:*

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \forall n > N_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b].$$

Teoremă 2.12 (Abel)**:** *Dacă seria $\sum_n f_n$ de funcții se poate scrie sub forma $\sum_n \alpha_n \nu_n$, astfel încît seria de funcții $\sum_n \nu_n$ să fie UC, iar (α_n) să fie un șir monoton de funcții egal mărginite, atunci ea este uniform convergentă.*

Teoremă 2.13 (Dirichlet)**:** *Dacă seria $\sum_n f_n$ de funcții se poate scrie sub forma $\sum_n \alpha_n \nu_n$ astfel încît șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum_n \nu_n$ este un șir de funcții egal mărginite, iar (α_n) este un șir monoton ce converge uniform către 0, atunci ea este uniform convergentă.*

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis și fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^m pe I. Pentru orice $a \in I$, definim **polinomul Taylor** de gradul $n \leqslant m$ asociat funcției f în punctul a:

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Restul de ordin n este, prin definiție:

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Polinoamele Taylor de gradul întîi (respectiv al doilea) se numesc *aproximarea liniară* (respectiv pătratică) ale funcției în jurul punctului a.

Teoremă 2.14 (Formula Taylor cu resturi Lagrange)**:** *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^{n+1} și $a \in I$. Atunci, pentru orice $x \in I$, există $\xi \in (a, x)$ (sau (x, a)), astfel încît:*

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

De asemenea, avem următoarele observații:

(1) Restul de ordin n poate fi scris sub *forma Peano*:

$$\exists \omega : I \to \mathbb{R} \text{ a.î. } \lim_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0, \quad R_{n,f,a}(x) = \frac{(x - a)^n}{n!} \omega(x);$$

(2) $\lim_{x \to a} \dfrac{R_{n,f,a}(x)}{(x - a)^n} = 0$;

(3) Restul de ordin n se poate scrie și integral:

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

3 Exerciții

1. Să se determine mulțimea de convergență și suma seriilor:

(a) $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(b) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} (\frac{1-x}{1-2x})^{2n-1}$;

(c) $\sum_{n \geqslant 0} (2+(-1)^n)x^n$;

(d) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^2(3^n - 2^n)}{6^n}$.

2. Folosind dezvoltarea lui e^x în serie de puteri, să se afle suma seriei $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n!}$.

3. Să se arate că funcțiile următoare sînt dezvoltabile în serii de puteri și să se găsească dezvoltările, specificînd intervalele în care sînt valabile:

(a) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, x \in (-1, 1)$;

(b) $f(x) = \frac{3x}{x^2+5x+6}, x \in \mathbb{R} - \{-2, -3\}$;

(c) $f(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{t} dt, x \in [-1, 1]$;

4. Dezvoltați în serie de puteri funcția $f(x) = \arcsin x$.

5. Să se arate că funcția $f(x) = \ln \frac{1}{x^2+2x+2}, x \in \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor într-un interval ce conține în interior punctul $x = -1$ și să se determine această dezvoltare și intervalul în care ea este valabilă.

6. Să se determine mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții:

(a) $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n, x \neq \frac{1}{2}$;

(b) $\sum (-1)^n \frac{1}{\ln n} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n, x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}}) \cdots (2-x^{\frac{1}{n}}), x > 0$;

(d) $\sum 2^n \sin \frac{x}{3^n}$;

(e) $\sum \frac{\ln(1+a^n)}{n^x}, a \geqslant 0$;

(f) $\sum \frac{\sin^n x}{n^a}, a \in \mathbb{R}$.

7. Să se arate că seria de funcții $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar nu converge absolut pe $\mathbb{R}$.

8. Folosind dezvoltarea în serie Taylor, să se calculeze $\sin 32°$, cu precizia 10^{-3}.

9. Folosind dezvoltări limitate, să se calculeze:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$;

(b) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

10. Să se calculeze cu o eroare mai mică decît 10^{-3} integralele (folosind dezvoltarea în serie a integrandului):

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\arctan x}{x} dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-x^2} dx$