Seminar 8
Jordanizare, conice, cuadrice

CUPRINS

1 Forme biliniare

Definiţie 1.1: Fie V un spațiu vectorial și $F : V \times V \to \mathbb{R}$ o aplicație.
F se numește *formă biliniară* dacă satisface:

(a) $F(\alpha x + \beta y, z) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z)$;

(b) $F(x, \alpha y + \beta z) = \alpha F(x, y) + \beta F(x, z)$.

Definiţie 1.2: O formă biliniară $F : V \times V \to \mathbb{R}$ se numește *simetrică* dacă $F(x, y) = F(y, x), \forall x, y \in V$.

Definiţie 1.3: O formă biliniară simetrică F se numește *pozitiv (negativ) semidefinită* dacă $F(x, x) = 0$ (respectiv $F(x, x) \leqslant 0$), pentru orice $x \in V$.
Dacă, în plus, $F(x, x) = 0$ numai pentru $x = 0_V$, ea se numește *pozitiv (negativ) definită*.

Exemple:

(1) Dacă V este un spațiu euclidian real, atunci produsul scalar este o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită.

(2) Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^n$ este o submulțime deschisă, iar $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă $C^2(D)$, atunci diferențiala a doua a lui f este o formă biliniară și simetrică:

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, F(h, k) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(h_i k_j),$$

unde $(h_i), (k_j) \in \mathbb{R}^n$.

Folosind biliniaritatea, putem asocia unei forme pătratice o matrice într-o bază:

$$F(x, y) = F\Big(\sum_i x_i e_i \sum_j y_j e_j\Big) = \sum_i \sum_j x_i y_j F(e_i, e_j).$$

2 Forme pătratice

Definiţie 2.1: Fie F o formă biliniară și simetrică. Aplicația:

$$Q : V \to \mathbb{R}, Q(x) = F(x, x)$$

se numește *forma pătratică asociată formei biliniare simetrice* F.
În acest context, F se numește *polara formei pătratice* Q.

Observaţie 2.1: Oricărei forme pătratice i se poate asocia o unică formă biliniară simetrică și reciproc.

Asocierea formei pătratice rezultă din definiție, iar forma biliniară poate fi definită astfel:

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= F(x+y, x+y) \\ &= F(x, x) + 2F(x, y) + F(y, y) \\ &= Q(x) + 2F(x, y) + Q(y) \\ \Rightarrow F(x, y) &= \frac{1}{2}\big(Q(x, y) - Q(x) - Q(y)\big). \end{aligned}$$

De exemplu, produsul scalar, ca formă biliniară, induce pătratul normei, ca formă pătratică.

2.1 Forma canonică

Ne vor interesa problemele de aducere a unei forme pătratice la forma canonică:

Definiţie 2.2: Spunem că forma pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ este *redusă la forma canonică* dacă găsim pentru Q o scriere de forma:

$$Q(x) = \sum_i b_i x_i^2,$$

într-o anumită bază a lui V.

Această metodă se bazează pe rezultatul următor:

Teoremă 2.1 (C. F. GAUSS)**:** *Pentru orice formă pătratică* $Q : V \to \mathbb{R}$*, există o bază* $\mathcal{B}$ *a lui* V *în care forma pătratică este redusă la forma canonică.*

Demonstraţie. Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza lui V față de care forma pătratică Q are scrierea:

$$Q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j.$$

Vom distinge două cazuri:

(1) Dacă există cel puțin un indice $1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît $a_{ii} \neq 0$ (deoarece în expresia formei pătratice apare cel puțin un termen la pătrat), atunci, printr-o eventuală renumerotare a indicilor (și, respectiv, a vectorilor bazei B), putem presupune $a_{11} \neq 0$. În expresia formei Q, regrupăm termenii:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= a_{11} x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_1 x_j + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \\
&= \frac{1}{a_{11}} \big(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n\big)^2 - \frac{1}{a_{11}} \cdot \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{1i} a_{1j} x_i x_j + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \\
&= \frac{1}{a_{11}} \big(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + + a_{1n}\ x_n\big)^2 + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{ij} x_i x_j,
\end{aligned}$$

unde am notat $a'_{ij} = a_{ij} \dfrac{a_{1i} a_{1j}}{a_{11}}$, pentru orice indice $2 \leqslant i, j \leqslant n$.

Facem următoarele notații:

$$\begin{cases}
x'_1 & = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\
x'_2 & = x_2 \\
\dots\dots\dots \\
x'_n = x_n.
\end{cases}$$

Cu aceasta, obținem:

$$Q(x) = \frac{1}{a_{11}} {x'_1}^2 + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{ij} x'_i x'_j.$$

În această expresie, $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ sînt componentele vectorului x în baza $B' = \{e'_i\}$. De remarcat faptul că suma $\displaystyle\sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{ij} x'_i x'_j$ care apare în expresia de mai sus este o formă pătratică cu $n-1$ variabile. Așadar, după cel mult $n-1$ astfel de pași, obținem o bază $\overline{B} = \{\overline{e}_i\}$ a lui V, față de care forma pătratică are forma canonică:

$$Q(x) = \alpha_1 \overline{x}_1^2 + \alpha_2 \overline{x}_2^2 + \dots + \alpha_n \overline{x}_n^2.$$

(2) Pentru al doilea caz, dacă toți coeficienții a_{ii} sînt nuli, adică în forma pătratică apar doar termeni micști, presupunem, mai departe, că întreaga formă nu este nulă, deci există $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$,

cu $a_{ij} \neq 0$. Putem, din nou, să facem o eventuală renumerotare și să presupunem $a_{12} \neq 0$. Facem schimbările de coordonate:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1' + x_2' \\ x_2 &= x_1' - x_2' \\ x_3 &= x_3' \\ \dots \\ x_n &= x_n'. \end{cases}$$

Obținem:

$$Q(x) = 2a_{12}\Big[(x_1')^2 - (x_2')^2\Big] + \dots .$$

În această expresie, avem cel puțin un termen la pătrat, deci putem continua apoi procedeul pentru restul termenilor (cei omiși). □

Procedeul descris în această teoremă se numește *metoda lui Gauss de a reduce o formă pătratică la forma canonică*.

Să luăm un exemplu:

Exemplu 2.1: Fie forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, care, într-o bază a spațiului $\mathbb{R}^3$ are expresia:

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Folosim metoda lui Gauss. Deoarece în expresia acestei forme pătratice avem și termeni la pătrat, ne situăm în primul caz din demonstrație. Urmăm procedeul și avem:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{3}(9x_2^2 + 6x_2x_3) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{3}(3x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

Facem notațiile:

$$\begin{cases} \overline{x}_1 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \overline{x}_2 &= 3x_2 + x_3 \\ \overline{x}_3 &= x_3. \end{cases}$$

Cu acestea, obținem forma canonică a formei pătratice:

$$Q(x) = \overline{x}_1^2 + \frac{1}{3}\overline{x}_2^2 - \frac{1}{3}\overline{x}_3^2.$$

Să determinăm și baza $\overline{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ în care s-a obținut această formă canonică. Pentru aceasta, exprimăm componentele inițiale $\{x_1, x_2, x_3\}$ în funcție de componentele $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\}$ din baza $\overline{B}$:

$$\begin{cases} x_1 &= \overline{x}_1 + \frac{1}{3}\overline{x}_2 - \frac{4}{3}\overline{x}_3 \\ x_2 &= \frac{1}{3}\overline{x}_2 - \frac{1}{3}\overline{x}_3 \\ x_3 &= \overline{x}_3. \end{cases}$$

Rezultă că matricea de trecere de la baza inițială $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la baza $\overline{B}$ este:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Așadar, vectorii bazei $\overline{B}$ sînt:

$$\begin{cases} \overline{e}_1 & = e_1 \\ \overline{e}_2 & = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 \\ \overline{e}_3 & = -\frac{4}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + e_3. \end{cases}$$

Să mai vedem un exemplu care să pună la lucru cazul al doilea din teoremă.

Exemplu 2.2: Fie forma pătratică:

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

O vom aduce la forma canonică folosind metoda lui Gauss și vom specifica și baza în care ea are această formă canonică.

Deoarece în expresia formei pătratice apar doar termeni micști, ne situăm în al doilea caz din demonstrația teoremei. Facem schimbările de coordonate:

$$\begin{cases} x_1 & = x'_1 + x'_2 \\ x_2 & = x'_1 - x'_2 \\ x_3 & = x'_3. \end{cases}$$

Forma pătratică devine:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x'_1)^2 - (x'_2)^2 + (x'_1 - x'_2) \cdot x'_3 + x'_3(x'_1 + x'_2) \\ &= (x'_1)^2 - (x'_2)^2 + 2x'_1x'_3 \\ &= \left[(x'_1)^2 + 2x'_1x'_3\right] - (x'_2)^2 \\ &= (x'_1 + x'_3)^2 - (x'_2)^2 - (x'_3)^2. \end{aligned}$$

Facem altă schimbare de coordonate:

$$\begin{cases} \overline{x}_1 & = x'_1 + x'_3 \\ \overline{x}_2 & = x'_2 \\ \overline{x}_3 & = x'_3. \end{cases}$$

Cu acestea, rezultă forma canonică:

$$Q(x) = \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2 - \overline{x}_3^2.$$

De asemenea, din schimbările de variabile rezultă și schimbările de coordonate:

$$\begin{cases} \overline{x}_1 & = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ \overline{x}_2 & = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \overline{x}_3 & = x_3. \end{cases}$$

2.2 Metoda lui Jacobi

Cea de-a doua metodă pe care o studiem este *metoda lui Jacobi*, care se bazează pe următorul rezultat:

Teoremă 2.2 (C. Jacobi)**:** *Fie* V *un spațiu vectorial și* $B = \{e_1, \dots e_n\}$ *o bază a lui* V*. Fie* $Q : V \to \mathbb{R}$ *o formă pătratică, cu expresia în baza* B*:*

$$Q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j.$$

Dacă matricea $A = (a_{ij})$ *asociată formei pătratice* Q *în baza* B *are toți minorii principali:*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det(A)$$

nenuli, atunci există o bază $\overline{B}$ *a lui* V *față de care* Q *are forma canonică:*

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}\overline{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\overline{x}_3^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\overline{x}_n^2.$$

Demonstrație. Fie $F : V \times V \to \mathbb{R}$ polara formei pătratice Q. Căutăm vectorii bazei $\overline{B}$, de forma:

$$\begin{cases} \overline{e}_1 & = c_{11}e_1 \\ \overline{e}_2 & = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{e}_i & = c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 + \cdots + c_{ii}e_i \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{e}_n & = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \cdots + c_{nn}e_n. \end{cases} \tag{1}$$

Coeficienții c_{ij} se determină din condițiile:

$$F(\overline{e}_i, e_j) = 0, \forall 1 \leqslant j < i \leqslant n$$
$$F(\overline{e}_i, e_i) = 1, \forall 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Condițiile se obțin din faptul că matricea asociată formei pătratice Q în baza $\overline{B}$ să fie diagonală, cu c_{ii} pe diagonală.

Fie $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ arbitrar fixat. Avem:

$$F(\overline{e}_i, e_j) = F\Big(\sum_{k=1}^{i} c_{ki}e_k e_j\Big) = \sum_{k=1}^{i} c_{ki}F(e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{i} c_{ki}a_{kj},$$

de unde, ținînd cont că $a_{kj} = a_{jk}$, obținem sistemul:

$$\begin{cases} a_{11}c_{1i} + a_{12}c_{2i} + \cdots + a_{1i}c_{ii} & = 0 \\ a_{12}c_{1i} + a_{22}c - 2i + \cdots + a_{2i}c_{ii} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a - 1, i - 1c_{1i} + a_{2,i-1}c_{2i} + \cdots + a_{i-1,i}c_{ii} & = 0 \\ a_{1i}c_{1i} + a_{2i}c_{2i} \ + \cdots + a_{ii}\ c_{ii} & = 1. \end{cases}$$

Remarcăm că determinantul matricei acestui sistem este minorul principal Δ_i, care, conform ipotezei, este nenul. Așadar, putem rezolva sistemul cu regula lui Cramer:

$$c_{ii} = \frac{1}{\Delta_i} \cdot \Delta_{i-1}.$$

Mai folosim faptul că:

$$\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{12} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}\cdots c_{nn} = \frac{1}{\Delta_n} \neq 0$$

și, în plus, că $B = \{e_e, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază a lui V, rezultă și că $\overline{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n\}$ este o bază a lui V. Deoarece:

$$F(\overline{e}_i . \overline{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ c_{ii}, & i = j, \end{cases}$$

rezultă concluzia teoremei. □

Să mai facem o observație importantă. Spre deosebire de metoda lui Gauss, care poate fi aplicată oricărei forme pătratice, metoda lui Jacobi cere în mod necesar ca toți minorii principali ai matricei atașate formei pătratice în baza inițială să fie nenuli. Altfel, această metodă nu se poate aplica.

Să o vedem într-un exemplu:

Exemplu 2.3: Reducem la forma canonică forma pătratică:

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Matricea asociată formei pătratice Q în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Minorii principali ai matricei sînt toți nenuli, după cum se poate verifica simplu. Așadar, putem aplica metoda lui Jacobi și forma canonică a formei pătratice Q este, direct:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{\Delta_1}\overline{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\overline{x}_3^2 \\ &= \frac{1}{3}\overline{x}_1^2 + \frac{3}{8}\overline{x}_2^2 - \frac{1}{4}\overline{x}_3^2. \end{aligned}$$

Pentru a obține baza în care avem această formă, se rezolvă sistemul (1).

2.3 Metoda transformărilor ortogonale

În fine, ultima metodă algoritmică pe care o discutăm este *metoda transformărilor ortogonale*. Ea se bazează pe următorul rezultat, care, la rîndul lui, pune în prim-plan bazele ortonormate din spații vectoriale:

Teoremă 2.3: *Fie V un spațiu euclidian de dimensiune n și Q o formă pătratică.*

Există o bază ortonormată a lui V în raport cu care forma pătratică Q este redusă la forma canonică.

Demonstrație. Știm că există o bază ortonormată pentru V. Fie aceasta $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Fie $A = (a_{ij})$ matricea asociată formei pătratice Q în baza $\mathcal{B}$. Deoarece A este matrice simetrică, rezultă că există două matrice ortogonale $C = (c_{ij})$ și D – o matrice diagonală cu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, care reprezintă forma diagonală a matricei A, astfel încît:

$$A = CDC^T.$$

Construim acum baza $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1, \overline{e_2}, \dots, \overline{e}_n\}$ a lui V, astfel încît matricea de trecere de la $\mathcal{B}$ la $\overline{\mathcal{B}}$ să fie chiar C, adică:

$$\begin{cases} \overline{e}_1 = c_{11}\, e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n \\ \overline{e}_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{e}_n = c_{1n}\, e_1 + c_{2n}\, e_2 + \dots + c_{nn}\, e_n \end{cases}$$

Ținem cont de faptul că $\overline{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ este o bază ortonormată, iar C este o matrice ortogonală.

Deci obținem relațiile:

$$\begin{aligned}
\langle \overline{e}_i, \overline{e}_i \rangle &= \Big\langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j \Big\rangle \\
&= \sum_{1 \leqslant k,j \leqslant n} c_{ki} c_{ji} \langle e_k, e_j \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{ki}^2 = 1, \forall 1 \ \leqslant i \leqslant n \\
\langle \overline{e}_i, \overline{e}_j \rangle &= \Big\langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \sum_{p=1}^{n} c_{pj} e_p \Big\rangle \\
&= \sum_{1 \leqslant k,p \leqslant n} c_{ki} c_{pj} \langle e_k, e_p \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} c_{kj} \\
&= 0, \forall i \neq j.
\end{aligned}$$

Rezultă $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$ este o bază ortonormată a lui V.

Fie F polara formei pătratice Q. Rezultă că matricea asociată lui F în baza $\overline{\mathcal{B}}$ este diagonală, cu λ_i pe diagonală și deci, forma pătratică Q va avea scrierea în baza $\overline{\mathcal{B}}$:

$$Q(x) = \lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + \dots + \lambda_n \overline{x}_n^2,$$

adică este redusă la forma canonică, ceea ce se dorea. □

Trebuie remarcat faptul că, încă din enunț, este clar că metoda aceasta se aplică doar spațiilor euclidiene. Dar, cum spațiul $\mathbb{R}^n$ este euclidian, vom avea suficiente exemple și exerciții în care să o punem la lucru.

Sumarizînd, algoritmul de aplicat, așa cum reiese din demonstrația anterioară, cuprinde:

(1) Scriem matricea A atașată formei pătratice;

(2) Găsim, prin rezolvarea ecuației caracteristice, $\det(A - \lambda I_n) = 0$, valorile proprii λ_i, cu $1 \leqslant i \leqslant p$, care au ordinele de multiplicitate n_i și determinăm subspațiile vectorilor proprii $V(\lambda_i)$, care corespund acestor valori proprii.

(3) Pentru fiecare subspațiu $V(\lambda_i)$, determinăm cîte o bază ortonormată $\mathcal{B}_i$;

(4) Forma canonică a formei pătratice este, cu acestea:

$$Q(x) = \lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + \dots + \lambda_n \overline{x}_n^2,$$

cu observația că fiecare valoare proprie apare de un număr de ori egal cu multiplicitatea sa. Baza ortonormată în care se obține această formă canonică este dată de reuniunea $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$.

Aplicăm această metodă pe un exemplu.

Exemplu 2.4: Fie forma pătratică:

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

O vom aduce la forma canonică folosind metoda transformărilor ortogonale și, totodată, vom determina și baza ortonormată în care Q are acea formă.

Matricea asociată formei pătratice Q în baza canonică este:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii, prin rezolvarea ecuației caracteristice. Rezultă:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4.$$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -2$ generează subspațiul invariant:

$$V(-2) = \{(-\alpha, -\alpha, 2\alpha)^T \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O bază pentru acest subspațiu este, de exemplu, $\{(-1, -1, 2)^T\}$. Aplicăm algoritmul Gram-Schmidt pentru ortonormare și obținem:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T \right\}.$$

Procedăm similar pentru valoarea proprie $\lambda = 4$ și obținem:

$$V(4) = \{(-\alpha + 2\beta, \alpha, \beta)^T \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Alegem $e_2 = (-1, 1, 0)^T \in V(4)$ și vrem să determinăm $e_3 \perp e_2$, cu $e_3 = (-\alpha_3 + 2\beta_3, \alpha_3, \beta_3)^T$. Condiția de perpendicularitate înseamnă $\langle e_2, e_3 \rangle = 0$, deci obținem: $\beta_3 = \alpha_3 \Longrightarrow e_3 = (\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3)^T$. Ortonormăm această bază și obținem:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T \right\}.$$

Forma canonică a formei pătratice date este, atunci:

$$Q(x) = -2\overline{x}_1^2 + 4\overline{x}_2^2 - 4\overline{x}_3^2.$$

Această formă se obține în baza ortonormată $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Observaţie 2.2: De remarcat faptul că, pornind cu aceeași formă pătratică și aplicînd metode diferite de aducere la forma canonică, putem obține rezultate diferite.

În secțiunea următoare, vom identifica un invariant al formei canonice.

3 Signatura unei forme pătratice. Teorema inerției

Definiţie 3.1: Fie Q o formă pătratică, ce are forma canonică:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{x}_i^2.$$

Presupunem că în această scriere sînt p coeficienți strict pozitivi, q coeficienți strict negativi, iar $r = n - (p + q)$ coeficienți sînt nuli.

Tripletul (p, q, r) se numește *signatura formei pătratice*.

Acesta este invariantul din forma canonică a unei forme pătratice, după cum arată teorema următoare:

Teoremă 3.1 (Teorema inerției)**:** *Signatura unei forme pătratice este un invariant al formei canonice, adică este aceeași în orice formă canonică a formei pătratice respective.*

Demonstrație. Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică și $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$ două baze ale lui V, în raport cu care Q are formele canonice:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \overline{x}_i^2, \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \widetilde{x}_i^2.$$

Presupunem că signatura în prima scriere este (p_1, q_1, r_1), iar în a doua, (p_2, q_2, r_2). Printr-o eventuală rearanjare a termenilor, putem presupune că primii p_1 (respectiv p_2) coeficienți sînt strict pozitivi, apoi următorii q_1 (respectiv q_2) sînt negativi, iar ultimii r_1, respectiv r_2 sînt nuli.

Să presupunem că $p_1 > p_2$. Fie $V_1 = Span\{e_1, \dots e_{p_1}\}$ și $V_2 = Span\{e_{p_2+1}, \dots, e_n\}$. Rezultă:

$$\dim_{\mathbb{R}} V_1 + \dim_{\mathbb{R}} V_2 = p_1 + n - p_2 > n.$$

Așadar, există o intersecție nevidă între cele două și avem, conform teoremei dimensiunii (Grassmann):

$$n \geqslant \dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = \dim_{\mathbb{R}} V_1 + \dim_{\mathbb{R}} V_2 - \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2) > n - \dim_{\mathbb{R}}(V_1 \cap V_2).$$

Deci $V_1 \cap V_2 \neq \{0_V\}$ și putem considera un vector nenul x^* în $V_1 \cap V_2$.

Pe de o parte, deoarece $x^* \in V_1$, avem că el se poate scrie în baza corespunzătoare, $x^* = \overline{x}_1 e_1 + \dots + \overline{x}_p e_p$, de unde deducem:

$$Q(x^*) = \sum_{i=1}^{p} a_i \overline{x}_i^2 \geqslant 0.$$

Pe de altă parte, deoarece $x^* \in V_2$, avem și scrierea sa în baza B_2, $x^* = \widetilde{x}_{p_2+1} f_{p_2+1} + \dots + \widetilde{x}_n f_n$. Deci:

$$Q(x^*) = \sum_{i=p_2+1}^{n} b_i \widetilde{x}_i^2 \leqslant 0.$$

Din relațiile de mai sus, rezultă că $Q(x^*) = 0$, ceea ce implică faptul că el are toate coordonatele nule, deci $x^* = 0_V$, contradicție.

Așadar, presupunerea $p_1 > p_2$ este falsă și similar se arată că nu putem avea nici inegalitatea inversă și la fel pentru $q_1 = q_2$. □

Definiție 3.2: Spunem că o formă pătratică $Q : V \to \mathbb{R}$ este *pozitiv (negativ) definită* dacă $Q(x) > 0$ (respectiv $Q(x) < 0$), pentru orice $x \in V - \{0_V\}$.

Evident, această definiție este echivalentă cu faptul că polara ei, F, este pozitiv (respectiv negativ) definită.

Următorul rezultat ne ajută să decidem cînd este o formă pătratică pozitiv definită.

Teoremă 3.2 (Criteriul lui Sylvester)**:** *Fie $Q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică și $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază a lui V, iar $A = (a_{ij})$ matricea asociată formei pătratice Q în baza B. Fie $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ minorii principali ai matricei A. Atunci:*

(a) Q este pozitiv definită dacă și numai dacă $\Delta_i > 0$, pentru toți $1 \leqslant i \leqslant n$;

(b) Q este negativ definită dacă și numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$, pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$.

De asemenea, o consecință imediată, așteptată, este următoarea:

Propoziție 3.1: *Forma pătratică este pozitiv definită dacă și numai dacă matricea ei asociată este pozitiv definită.*

Știm, de asemenea, că între mulțimea formelor pătratice $Q : V \to \mathbb{R}$ și mulțimea matricelor simetrice există o corespondență bijectivă. Astfel că, folosind și propoziția anterioară, putem reformula criteriul lui Sylvester astfel:

Teoremă 3.3: *O matrice simetrică este pozitiv definită dacă are toți minorii principali strict pozitivi.*

4 Conice

Studiul conicelor, ca obiecte geometrice, are o vechime considerabilă, fiind discutate încă din vremea lui Euclid și Grecia Antică. Appollonius din Perga (262 – 190 î. Hr.) a fost cel care le-a dat pentru prima dată numele pe care le folosim și astăzi, anume elipsă, parabolă și hiperbolă.

În perioada Renașterii și ulterior, conicele au devenit din ce în ce mai importante și studiate, prin prisma relevanței lor în fizică. Mișcările planetare și alte traiectorii studiate de Kepler, Galilei și alții, dar și în scopuri geometrice pure la Descartes, Fermat, Desargues, Pascal și alții au constituit cadrul în care teoria conicelor a evoluat.

Contextul geometric inițial a fost acela al secțiunilor determinate de un con infinit, intersectat cu un plan, în diverse configurații. De asemenea, pe lîngă această definiție geometrică simplă și generală, ele se pot studia și cu ajutorul formelor pătratice din spații vectoriale – abordare pe care o vom lua în cele ce urmează.

Considerăm, așadar, un plan E_2, cu un reper cartezian $\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ prin care planul se poate identifica cu $\mathbb{R}^2$. Acest model ne va permite să descriem figurile cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor asociate unor funcții reale.

Fie o formă pătratică afină $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00},$$

cu $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Atunci:

Definiţie 4.1: Mulțimea de nivel constant zero:

$$\Gamma = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$$

se numește *conică* sau *curbă algebrică de ordinul al doilea*.

Notăm aceasta cu $\Gamma : g(x, y) = 0$.

Să remarcăm că, din punct de vedere topologic, conicele sînt mulțimi închise în $\mathbb{R}^2$, deoarece $\{0\}$ este mulțime închisă în $\mathbb{R}$, iar Γ, care este imaginea sa inversă prin funcția continuă g este, de asemenea, închisă.

Problema principală căreia se adresează în primă fază studiul conicelor este aceea de a arăta că orice conică este congruentă cu una din mulțimile cunoscute: cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă, pereche de drepte, punct sau mulțime vidă.

Pentru aceasta, vom folosi o serie de transformări geometrice, precum rotația și translația, față de care conica de interes să aibă o formă canonică.

În calcule, vor interveni următoarele numere asociate polinoamelor $g(x, y)$ ca mai sus:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$I = a_{11} + a_{22}$$

$$K = \delta + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} \\ a_{10} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{20} \\ a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}$$

Observaţie 4.1: Atunci cînd se fac rotații și translații asupra unei conice, se poate arăta că numerele de mai sus sînt invariante, motiv pentru care se vor numi *invarianți metrici* ai conicei (rotația și translația fiind izometrii).

Ultimul număr asociat, K, este invariat doar de rotații și, de aceea, se mai numește *semi-invariant* metric al conicei.

Pe scurt, clasificarea conicelor este dată în tabelul următor:

δ	Δ	$I\Delta$	K	**Conica**	**Genul**
>0	$\neq 0$	<0		Elipsă	**Gen eliptic**
	$\neq 0$	>0		Conica vidă	
	$=0$			Punct (dublu)	
<0	$\neq 0$			Hiperbolă	**Gen hiperbolic**
	$\neq 0$			Hiperbolă	
	$=0$			Pereche de drepte concurente	
$=0$	$\neq 0$			Parabolă	**Gen parabolic**
	$=0$		<0	Pereche de drepte paralele	
	$=0$		$=0$	Pereche de drepte confundate	
	$=0$		>0	Conica vidă	

După cum se vede din tabel, invariantul δ ne dă *genul conicei*, în timp ce invariantul Δ ne dă degenerarea.

În cazul hiperbolic, dacă se anulează invariantul I, sîntem conduși la o hiperbolă echilateră, în care asimptotele sînt perpendiculare, iar în cazul degenerat, cu $\Delta = 0$, hiperbola este redusă la o pereche de drepte perpendiculare.

Cazurile principale, prezentate în tabel, împreună cu ecuațiile lor, sînt redate în figura 4.

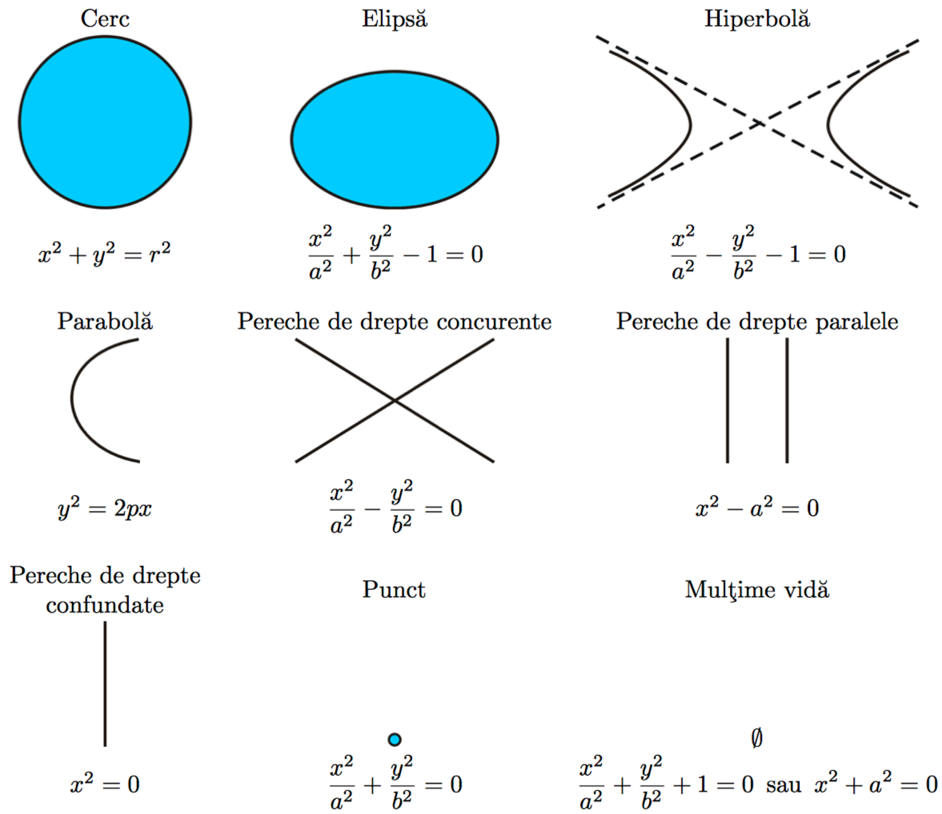

Figura 1: Conice și ecuațiile lor

Punctele critice ale funcției g se determină folosind instrumentele cunoscute de analiză multidimensională. Astfel, avem de rezolvat sistemul liniar:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} &= a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem liniar este chiar:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Rezultă, din teoria sistemelor liniare, că, dacă $\delta \neq 0$, atunci sistemul are soluție unică, deci funcția are un singur punct critic.

Din configurația geometrică, interpretată algebric, rezultă:

Teoremă 4.1: *Punctul* $M_0(x_0, y_0)$ *este centru de simetrie al conicei* $\Gamma : g(x, y) = 0$ *dacă și numai dacă* $M_0(x_0, y_0)$ *este un punct critic al funcției* g.

Demonstrație. Facem translația $x = x_0 + x'$ și $y = y_0 + y'$. Atunci ecuația conicei devine:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + x'g_{x_0} + y'g_{y_0} + g(x_0, y_0) = 0,$$

unde $g_{x_0} = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$, iar $g_{y_0} = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Originea $M_0(x_0, y_0)$ a reperului translatat este centru de simetrie dacă și numai dacă odată cu un punct arbitrar (x', y'), conica Γ conține și punctul $(-x', -y')$, adică are loc:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 - x'g_{x_0} - y'g_{y_0} + g(x_0, y_0) = 0.$$

Prin scădere din ecuația inițială, rezultă:

$$x'g_{x_0} + y'g_{y_0} = 0,$$

deci $M_0(x_0, y_0)$ satisface $g_{x_0} = g_{y_0} = 9$, deoarece (x', y') este un punct arbitrar pe Γ. □

În concluzie, privitor la clasificarea conicelor, avem:

(1) Dacă $\delta \neq 0$, atunci conica $\Gamma : g(x, y) = 0$ are un centru de simetrie, care este punctul critic al funcției g, ales originea reperului canonic.

Conicele cu centru sînt: cercul, elipsa, hiperbola, perechea de drepte concurente, punctul și mulțimea vidă. În acest context, ecuația lui Γ redusă la centru este:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + g(x_0, y_0) = 0.$$

De asemenea, se poate demonstra și că:

$$g(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta}.$$

(2) Dacă $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$, atunci funcția g nu are puncte critice, deci conica Γ nu are centru. O conică fără centru este o parabolă.

(3) Dacă $\delta = 0$ și $\Delta = 0$, atunci funcția g are o dreaptă de puncte critice, deci Γ are o dreaptă de centre. Conicele cu o dreaptă de centre sînt perechile de drepte paralele sau confundate, și mulțimea vidă.

De asemenea, alte observații care merită menționate sînt:

- Conica pentru care $\delta > 0$ (elipsa, conica vidă și punctul) se numește *conică de gen eliptic*. Cele pentru care $\delta < 0$, adică hiperbola și perechea de drepte concurente se numește *conică de gen hiperbolic*. Pentru $\delta = 0$, cum este cazul parabolei, dreptelor paralele sau confundate și mulțimii vide, obținem *conice de gen parabolic*.

- Ecuația generală a unei conice, $g(x, y) = 0$, conține șase coeficienți a_{ij}, care se numesc *parametri neesențiali*. Dacă împărțim prin unul diferit de zero, se obțin cinci parametri, care se numesc *parametri esențiali*. Rezultă de aici că, pentru a determina o conică sînt suficiente cinci condiții, precum cinci puncte de pe conică.

- Dacă $a_{12} = 0$ și $a_{11} = a_{22} = a \neq 0$, notăm:

$$\rho = \left(\frac{a_{10}}{a}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{a}\right).$$

  Cu ajutorul lui ρ putem decide imediat:

  – Dacă $\rho < 0$, atunci $\Gamma = \emptyset$;
  – Dacă $\rho > 0$, atunci Γ este un cerc, cu centrul în punctul $C\left(-\frac{a_{10}}{a}, -\frac{a_{20}}{a}\right)$ și cu raza $\sqrt{\rho}$;
  – Dacă $\rho = 0$, atunci Γ se reduce la punctul C de mai sus.

5 Reducerea conicelor la forma canonică

Ca în cazul formelor pătratice, ne vom ocupa acum de cîteva metode computaționale pentru a aduce conicele la forma canonică.

Pornim, așadar, cu o conică Γ, ce are ecuația generală:

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Pentru a stabili ecuația canonică, ținem cont de următoarele:

- Dacă $a_{12} = 0$, atunci facem o translație;

- Dacă $a_{12} \neq 0$, ase face mai întîi o rotație.

Detaliem acum fiecare dintre aceste proceduri.

5.1 Metoda valorilor proprii

Pornind cu conica de ecuație generală:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0,$$

tipul ei este determinat de forma pătratică:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Această formă pătratică poate fi modelată de produsul de matrice:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

cu observația că $a_{12} = a_{21}$. Matricei simetrice 2×2 din această scriere, îi atașăm ecuația caracteristică:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0,$$

ale cărei rădăcini λ_1, λ_2 sînt reale și distincte.

Distingem următoarele cazuri:

(a) Dacă λ_1, λ_2 au semne contrare, adică $\delta < 0$, rezultă că avem o conică de tip hiperbolic;

(b) Dacă λ_1, λ_2 au același semn, adică $\delta > 0$, conica este de tip eliptic;

(c) Dacă una dintre rădăcini este nulă, adică $\delta = 0$, rezultă că avem o conică de tip parabolic.

Aflînd valorile proprii ca mai sus, construim sistemele asociate pentru a determina vectorii proprii ($i = 1, 2$):

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)u_i + a_{12}\, v_i &= 0 \\ a_{21}u_i + (a_{22} - \lambda_i)v_i &= 0. \end{cases}$$

Astfel, găsim coordonatele vectorilor proprii (u_1, v_1), respectiv (u_2, v_2), care sînt ortogonali. Prin normare, găsim apoi versorii $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Fie acum R matricea formată cu coordonatele versorilor $\vec{e_1}$ și $\vec{e_2}$, pe coloane. Putem înlocui unul dintre versori cu opusul său sau să renumerotăm valorile proprii, astfel că putem presupune $\det(R) = 1$.

Atunci rotația:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

reduce forma pătratică inițială la expresia canonică:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

Versorii $\vec{e_1}$ și $\vec{e_2}$ dau direcțiile noilor axe OX' și, respectiv, OY'.

De asemenea, înlocuind în ecuația conicei, rotația efectuată o transformă în:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{12}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0.$$

Putem restrînge pătratele și să forțăm factorii comunic λ_1 și λ_2, ajungînd la forma:

$$\lambda_1(x' + P)^2 + \lambda_2(y' + Q)^2 + a = 0,$$

unde P și Q sînt termeni specifici care apar în prelucrarea algebrică.

Atunci putem face translația:

$$\begin{cases} x'' &= x' + P \\ y'' &= y' + Q \end{cases}$$

și sîntem conduși la forma canonică:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a = 0.$$

În acest context, cel puțin una dintre axele reperului canonic $X''O''Y''$ este axă de simetrie pentru conica Γ.

5.2 Metoda roto-translației

Cum am văzut mai sus, se obține o matrice de trecere R, care este ortogonală, deci $\det(R) = 1$. Rezultă că ea este asociată unei rotații $\mathcal{R}$, în raport cu o bază ortonormată. Această rotație poate fi fixată printr-un unghi de rotație specific θ.

Metoda pe care o expunem se bazează pe următorul rezultat:

Teoremă 5.1: *Fie conica $\Gamma : g(x, y) = 0$. Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci unghiul θ dat de ecuația:*

$$(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$$

determină o rotație $\mathcal{R}$ în plan:

$$\begin{cases} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y & -x' \sin\theta - y' \cos\theta, \end{cases}$$

care produce anularea coeficientului produsului $x'y'$ din ecuația $g \circ \mathcal{R}(x', y') = 0$.

Demonstrație. După efectuarea rotației, ecuația $g(x, y) = 0$ devine $g \circ \mathcal{R}(x', y') = 0$. Coeficientul termenului $x'y'$ din această ecuație este:

$$2a'_{12} = (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta.$$

Astfel, teorema devine evidentă.

Deoarece noua ecuație a conicei nu conține termenul $x'y'$, putem să completăm pătratele, dacă este cazul, iar în urma unei translații obținem ecuația canonică. □

Rezultatele aplicabile relativ la reducerea la forma canonică a ecuației unei conice se rezumă astfel:

(1) Dacă $\Delta = 0$, avem subcazurile:

(a) Pentru $\delta > 0$, atunci $\Gamma = \{(x_0, y_0)\}$;

(b) Pentru $\delta = 0$, atunci $\Gamma = D_1 \cap D_2$, unde D_1 și D_2 sînt drepte paralele sau confundate ori $\Gamma = \emptyset$;

(c) Pentru $\delta < 0$, atunci $\Gamma = D_1 \cup D_2$, unde D_1 și D_2 sînt drepte concurente. Dacă $I = 0$, atunci $D_1 \perp D_2$.

(2) Dacă $\Delta \neq 0$, avem subcazurile:

(a) Pentru $\delta > 0$, dacă $I\Delta < 0$, atunci avem o elipsă;

(b) Pentru $\delta > 0$, dacă $I\Delta > 0$, atunci $\Gamma = \emptyset$;

(c) Pentru $\delta = 0$, avem o parabolă;

(d) Pentru $\delta < 0$, atunci avem o hiperbolă. Dacă $I = 0$, atunci hiperbola este echilateră.

În toate aceste cazuri, transformările care se fac înseamnă:

- Dacă $a_{12} = 0$, atunci se face o translație;
- Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci se face mai întîi o rotație ca în teorema de mai sus, după unghiul rezultat din ecuația respectivă;
- După rotație, dacă mai este cazul, se face o translație.

6 Intersecția între o dreaptă și o conică

Date fiind formele diverse ale conicelor, vom fi interesați de cazurile posibile ale punctelor de intersecție dintre o dreaptă și o conică.

Fie D o dreaptă de ecuații parametrice:

$$\begin{cases} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

și Γ o conică de ecuație carteziană implicită $g(x, y) = 0$.

Intersecția $D \cap \Gamma$ este descrisă de sistemul:

$$\begin{cases} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ g(x, y) &= 0, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dacă eliminăm pe x și y, intersecția $D \cap \Gamma$ corespunde rădăcinilor t_1 și t_2 din $\mathbb{R}$ ale ecuației:

$$t^2 \varphi(l, m) + t\Big(l \frac{\partial g}{\partial x_0} + m \frac{\partial g}{\partial y_0}\Big) + g(x_0, y_0) = 0, \tag{2}$$

unde am introdus funcția:

$$\varphi(l,m) = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}\, m^2.$$

În cele ce urmează, vom face următoarele notații standard:

$$g_{x_0} = \frac{\partial g}{\partial x_0} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$g_{y_0} = \frac{\partial g}{\partial y_0} = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Se impune acum următoarea discuție:

(1) Dacă $\varphi(l,m) \neq 0$, atunci ecuația de interes, anume (2) este de gradul al doilea. Atunci, dacă

$$q = (lg_{x_0} + mg_{y_0})^2 - 4\varphi(l,m)g(x_0,y_0) > 0,$$

atunci ecuația are două rădăcini reale și distincte, t_1, t_2. În acest caz, avem că D taie pe Γ în două puncte distincte, P_1, P_2.

În cazul în care $q = 0$, atunci ecuația are două rădăcini reale confundate, $t_1 = t_2$. Atunci D taie pe Γ în două puncte confundate, $P_1 = P_2$, iar dreapta se numește *tangentă* la conica Γ în punctul P_1.

Evident, din configurația geometrică rezultă imediat că din orice punct $P_0 \notin \Gamma$ se pot duce cel mult două tangente la Γ. În particular, dacă $P_0 \in \Gamma$, iar g_{x_0} și g_{y_0} nu se anulează simultan, observăm că tangenta la Γ în punctul P_0 are ecuația:

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = 0,$$

care se obține din condiția de tangență, anume $lg_{x_0} + mg_{y_0} = 0$, împreună cu ecuațiile lui D, din care am eliminat tl și tm.

În general, o conică se numește *netedă*, dacă se poate duce o tangentă în fiecare punct al său. A netezi o conică înseamnă să i se elimine punctele critice, anume acelea în care g_x, g_y și g se anulează simultan.

O altă poziție relativă importantă a unei drepte față de o conică este aceea de *normală*. O dreaptă este normală la o conică dacă este perpendiculară pe tangenta dusă la conică în punctul respectiv. Normala în punctul $P_0(x_0, y_0)$ are ecuația:

$$\frac{x - x_0}{g_{y_0}} = \frac{y - y_0}{g_{x_0}},$$

care poate fi obținută simplu din condiția de perpendicularitate pe tangentă, interpretată analitic.

În fine, dacă $q < 0$, atunci ecuația (2) nu are soluții reale, deci D este paralelă cu Γ.

(2) Dacă $\varphi(l,m) = 0$, atunci ecuația (2) este de gradul întîi. Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} \neq 0$, atunci avem o soluție unică t_1, deci D taie pe Γ într-un singur punct P_1.

Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) \neq 0$, atunci ecuația reprezintă o imposibilitate, deci D este paralelă cu Γ.

În fine, dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) = 0$, atunci ecuația este identic satisfăcută, deci $D \subseteq \Gamma$, adică Γ este o pereche de drepte.

Dacă Γ este o conică nedegenerată, luăm acum un vector nenul $\vec{d}(l,m)$, care dă o direcție în planul conicei.

Definiţie 6.1: Direcția $\vec{d}(l,m)$ se numește *direcție asimptotică* pentru Γ dacă:

$$\varphi(l,m) = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0.$$

Evident, rezultă că o dreaptă care are o asemenea direcție taie conica nedegenerată în cel mult un punct.

În ce privește direcția asimptotică, distingem următoarele cazuri:

(1) Dacă $\delta < 0$ și $\Delta \neq 0$, adică sîntem în situația unei hiperbole, atunci ecuația $\varphi(l, m) = 0$ determină două direcții asimptotice distincte, (l_1, m_1) și (l_2, m_2).

(2) Dacă $\delta > 0$ și $\Delta \neq 0$, adică sîntem în situația unei elipse, atunci ecuația $\varphi(l, m) = 0$ nu admite soluții reale nebanale. Rezultă de aici că elipsa nu admite direcții asimptotice.

(3) Dacă $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$, adică sîntem în cazul unei parabole, atunci ecuația $\varphi(l, m) = 0$ dă o direcție asimptotică dublă (l, m), care este, de fapt, direcția axei parabolei.

Definiţie 6.2: O dreaptă D se numește *asimptotă* a unei conice nedegenerate Γ dacă direcția ei este asimptotică și $D \cap \Gamma = \emptyset$.

Din discuția anterioară, putem demonstra ușor:

Teoremă 6.1: *O asimptotă a unei conice nedegenerate Γ este caracterizată analitic prin ecuația:*

$$lg_x + mg_y = 0,$$

unde (l, m) este o direcție asimptotică.

De asemenea, din discuția privitoare la direcțiile asimptotice, avem:

(1) Hiperbola are două asimptote, care trec prin centrul conicei. Ele aproximează ramurile infinite ale hiperbolei.

(2) Elipsa nu are direcție asimptotică și, în consecință, nu are nici asimptotă.

(3) Parabola admite o direcție asimptotică pentru care ecuația $lg_x + mg_y = 0$ reprezintă mulțimea vidă, deci parabola nu are asimptotă.

7 Exerciții rezolvate

1. Să se reducă ecuația:

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$$

la forma canonică și să se identifice conica corespunzătoare.

Soluție: Matricea formei pătratice $q(x) = 3x^2 - 4xy$ este $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristică este, atunci, $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, care are rădăcinile $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 4$.

Coordonatele (u_1, v_1) ale vectorului propriu corespunzător lui λ_1 se află ca soluția sistemului:

$$\begin{cases} 4u_1 - 2v_1 & = 0 \\ -2u_1 + v_1 & ==, \end{cases}$$

adică $(k, 2k) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Prin normalizare, obținem versorul propriu $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Analog, pentru $\lambda_2 = 4$, găsim $\vec{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Să remarcăm că matricea:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

este o simetrie, deoarece $\det(R) = -1$. Vrem să înlocuim matricea R cu matricea unei rotații și folosim unul din următoarele procedee.

(1) Putem renumerota $\lambda_1' = \lambda_2$ și $\lambda_2' = \lambda_1$ și, corespunzător, $\vec{e}_1' = \vec{e}_2$, iar $\vec{e}_2' = \vec{e}_1$. Atunci rotația:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

care poate fi scrisă echivalent ca:

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y'), \end{cases}$$

conduce la:

$$4x'^2 - y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0.$$

Completăm pătratele și forțăm factorii comuni, obținînd:

$$4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0.$$

Pentru ultimul pas, efectuăm translația sistemului de coordonate în punctul $C_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$, translație dată de:

$$x' = x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y' = y'' + \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

În fine, obținem ecuația canonică a hiperbolei:

$$\frac{x''^2}{1/2} - \frac{y''^2}{2} - 1 = 0.$$

Vîrfurile acestei hiperbole se află pe axa C_1x''.

(2) Alternativ, o altă metodă este următoarea: convenim să folosim versorii: $\vec{e}_1^* = -\vec{e}_1, \vec{e}_2^* = \vec{e}_2$. Atunci rotația:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

conduce la ecuația:

$$-x_1^2 + 4y_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - 3 = 0.$$

În plus, direcțiile axelor de coordonate OX_1 și OY_1 sînt determinate de versorii $\vec{e}_1^*$ și $\vec{e}_2^*$, respectiv. Sistemul este translatat în $C_2\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ prin:

$$x_1 = x_2 + \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad y_1 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Hiperbola are vîrfurile pe axa C_2y_2; iar ecuația canonică a ei, raportată la sistemul $x_2C_2y_2$ este:

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{1/2} + 1 = 0.$$

2. Să se stabilească natura și genul conicei:

$$\Gamma : 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0.$$

Să se reducă ecuația lui Γ la forma canonică folosind metoda rotației și translației.
Soluție: Calculăm invarianții:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -100, \quad \delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă că Γ este o parabolă. Deoarece $a_{12} \neq 0$, putem face o rotație de unghi θ, care este soluția ecuației:

$$(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta - 2a_{12} \cos 2\theta = 0.$$

Ecuația este echivalentă cu:

$$4 \sin 2\theta + 3 \cos 2\theta = 0 \Longrightarrow 3 \tan^2 \theta - 8 \tan^2 \theta - 3 = 0 \Longrightarrow \tan \theta \in \{3, \frac{1}{3}\}.$$

Alegem atunci $\tan \theta = 3$, care se poate obține și folosind formula $\tan \theta = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}} = 3$. Nu ne interesează θ, ci doar $\sin \theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ și $\cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Formulele care descriu atunci rotația sistemului XOY sînt:

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y').$$

Față de sistemul rotit $X'OY'$, ecuația conicei Γ este:

$$y'^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' = 0.$$

În această expresie, completăm pătratele și obținem:

$$\left(y' - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10} - \frac{2}{\sqrt{10}}x'.$$

Atunci, cu translația:

$$\begin{cases} x' & = x'' \\ y' & = y'' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}, \end{cases}$$

găsim ecuația canonică a parabolei:

$$y''^2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}x'' + \frac{9}{10}.$$

Pentru cealaltă soluție, $\tan \theta = -\dfrac{1}{3}$, obținem:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

În acest caz, facem rotația:

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y'),$$

iar ecuația conicei devine:

$$x'^2 - \frac{6}{\sqrt{10}}x' + \frac{2}{\sqrt{10}}x' = 0.$$

Completăm pătratele, efectuăm translația:

$$\begin{cases} x' &= x'' + \dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ y' &= y'' \end{cases}$$

și găsim ecuația canonică a parabolei:

$$x''^2 = \frac{2}{\sqrt{10}}y'' + \frac{9}{\sqrt{10}}.$$

3. Se dă conica:

$$\Gamma : x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 6y - 4 = 0.$$

Aflați:

(a) polara relativ la $A(1,2)$ și tangentele duse din A la conică;

(b) Diametrul conjugat cu $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ și tangentele de direcție $\vec{v}$ la conică;

(c) tangenta dusă în punctul $B(1,1)$ la conică.

Soluție: (a) Ecuația polarei punctului A în raport cu conica se deduce prin dedublarea ecuației conicei cu coordonatele punctului $A(1,2)$. Rezultă:

$$\Delta_{pol,A} : 1 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{2}(x \cdot 2 + 1 \cdot y) + 3 \cdot 2y - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+1) + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (y+2) - 4 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{3}{8}x.$$

Acum, intersecția dintre polara Δ și conică este dată de:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 6y - 4 &= 0 \\ y &= \dfrac{3x}{8} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 43x^2 - 112x - 256 &= 0 \\ y &= \dfrac{3x}{8} \end{cases},$$

care are soluțiile:

$$T_{1,2}\Big(\frac{56 \pm 8\sqrt{221}}{43}, \frac{21 \pm 3\sqrt{221}}{43}\Big).$$

Rezultă că cele două tangente au ecuațiile:

$$\Delta_{1,2} : y - 2 = (x-1) \cdot \frac{-65 \pm 3\sqrt{221}}{13 \pm 8\sqrt{221}}.$$

(b) Diametrul conicei Γ conjugat cu direcția $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} = (1,-2)$ este dat de ecuația:

$$\Delta_{conj,\vec{v}} : 1 \cdot (2x - 2y - 4) + (-2) \cdot (-2x + 6y + 6) = 0 \Longleftrightarrow 3x - y7 - 8 = 0.$$

Dacă ducem tangentele de direcție $\vec{v} = (1,-2)$ la conică, atunci punctele de tangență (A,B) se află din sistemul:

$$\{A,B\} = \Gamma \cap \Delta_{conj} : \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 6y - 4 &= 0 \\ 3x - 7y - 8 &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{7y+8}{3} \\ 0 &= y^2 + y - 2 \end{cases},$$

de unde rezultă $A(-2,-2)$ și $B(5,1)$. În concluzie, ecuațiile tangentelor de direcție $\vec{v}$ la conică sînt:

$$\Delta_1 : \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{-2} \Longleftrightarrow 2x + y + 6 = 0$$
$$\Delta_2 : \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{2} \Longleftrightarrow 2x + y - 11 = 0.$$

(c) Tangenta dusă prin punctul $B(1,1) \in \Gamma$ la Γ are ecuația obținută prin dedublare cu coordonatele pucntului B, adică:

$$\Delta_{tg,B} : 1 \cdot x - (x+y) + 3 \cdot y - 2(x+1) + 3(y+1) - 4 = 0,$$

care se poate scrie echivalent:

$$2x - 5y + 3 = 0.$$

8 Cuadrice

8.1 Sfera

Fie E_3 un spațiu euclidian real tridimensional, raportat la un reper cartezian $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Fie $C(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat și $r > 0$ un număr real fixat. *Sfera* S *de centru* C *și rază* r este mulțimea punctelor $M(x, y, z)$, cu proprietatea că $d(C, M) = r$.

Distanța euclidiană se definește cu ajutorul radicalului, dar asta nu o face diferențiabilă peste tot, astfel că este înlocuită prin ridicare la pătrat.

Avem, așadar:

Teoremă 8.1: *Punctul* $M(x, y, z)$ *aparține sferei* S *de centru* $C(x_0, y_0, z_0)$ *și rază* r *dacă și numai dacă:*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Această ecuație se numește *ecuația carteziană implicită* a sferei. Ea este echivalentă cu trei *ecuații parametrice* în $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x &= x_0 + r \sin u \cos v \\ y &= y_0 + r \sin u \sin v \\ z &= z_0 + r \cos u, \end{cases}$$

unde $u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]$ sînt parametrii, sau cu *ecuația vectorială*:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + r(\sin u \cos v \vec{i} + \sin u \sin v \vec{j} + \cos u \vec{k}).$$

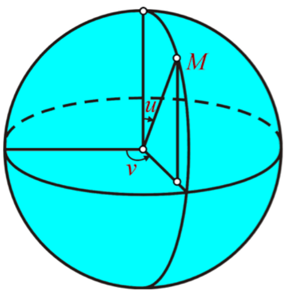

Figura 2: Sfera în spațiul euclidian tridimensional

Expresia care apare în definiția sferei este un polinom de gradul doi în nedeterminatele x, y, z, lucru care ne sugerează că ar trebui, în general, să cercetăm mulțimea Σ din $\mathbb{R}^3$, descrisă de o ecuație de forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Această ecuație poate fi rescrisă ca:

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 = \rho = a^2 + b^2 + c^2 - d,$$

numită *ecuația carteziană generală* a sferei.

Rezultă din această descriere că:

(a) Dacă $\rho > 0$, atunci Σ este o sferă cu centrul în $(-a, -b, -c)$ și cu raza $\sqrt{\rho}$;

(b) Dacă $\rho = 0$, atunci $\Sigma = \{(-a, -b, -c)\}$;

(c) Dacă $\rho < 0$, atunci $\Sigma = \emptyset$.

Ca suprafață din $\mathbb{R}^3$, sfera este o mulțime mărginită și închisă, deci compactă. Ea separă spațiul în două submulțimi disjuncte, interiorul ei și exteriorul ei.

Dacă considerăm funcția:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2,$$

atunci cele două mulțimi pot fi descrise ca:

$$\operatorname{int}(S) = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) < 0\}, \quad \operatorname{ext}(S) = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) > 0\}.$$

Două proprietăți topologice importante și totodată simple sînt:

Teoremă 8.2: *(a) Mulțimea* $\operatorname{int}(S)$ *este convexă.*

(b) Pentru orice punct $M_1 \in \operatorname{int}(S)$ *și orice punct* $M_2 \in \operatorname{ext}(S)$*, segmentul* $[M_1M_2]$ *intersectează pe* S.

Prin definiție, se numește *plan tangent* la sferă în punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ locul geometric al tuturor dreptelor tangente la sferă în punctul M_1. O altă proprietate topologică a sferei, dedusă din definiția ei cu ajutorul funcției de gradul al doilea, ne spune că ea este o suprafață netedă, adică în fiecare punct al său există un plan tangent.

Ecuația planului tangent în punctul $M_1 \in S$ se obține prin dedublarea ecuației sferei, adică:

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) + (z - z_0)(z_1 - z_0) - r^2 = 0,$$

care poate fi prelucrată și rescrisă ca:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + a(x + x_1) + b(y + y_1) + c(z + z_1) + d = 0.$$

8.2 Elipsoidul

Elipsoidul este o suprafață care generalizează sfera, la fel cum elipsa este un caz mai general de cerc.

Definiţie 8.1: Suprafața $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$, de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a, b, c > 0$$

se numește *elipsoid.*

Pentru a descrie forma geometrică a elipsoidului, îi studiem simetriile și intersecțiile cu axele de coordonate, precum și cu plane paralele cu axele de coordonate.

Dacă schimbăm oricare dintre nedeterminate cu opusa ei, ecuația elipsoidului nu se schimbă. Așadar, un elipsoid este simetric față de planele de coordonate, care se numesc *plane principale* ale elipsoidului.

Totodată, suprafața este simetrică și față de axele de coordonate, care se numesc *axele suprafeței*, deoarece schimbările tripletului (x, y, z) în $(x, -y, -z)$ sau $(-x, y, -z)$ ori $(-x, -y, z)$ nu modifică ecuația elipsoidului. Rezultă de aici, în plus, că originea este un centru de simetrie. Punctele în care axele de coordonate înțeapă suprafața elipsoidului se numesc *vîrfuri*.

Din ecuație, numerele a, b, c se numesc *semiaxe*. Intersecțiile dintre planele de coordonate și elipsoid sînt elipse:

$$(1)\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 &= 0\\ z &= 0\end{cases},\quad (2)\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 &= 0\\ y &= 0\end{cases},\quad (3)\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 &= 0\\ x &= 0.\end{cases}$$

Dacă intersectăm elipsoidul cu plane paralele cu XOY, obținem elipsele:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}-1 &= 0\\ z &= k, k\in[-c,c]\end{cases}$$

care sînt asemenea cu elipsa (1).

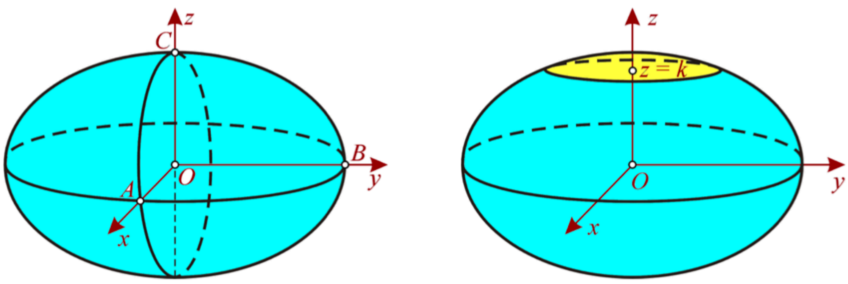

Figura 3: Intersecția elipsoidului cu planele principale

O proprietate topologică importantă este:

Teoremă 8.3: *Elipsoidul este o mulțime mărginită și închisă, deci compactă în spațiu.*

Demonstrație. Din ecuația elipsoidului, deducem că toate rapoartele sînt subunitare, adică:

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad -b\leqslant y\leqslant b,\quad -c\leqslant z\leqslant c.$$

Astfel, toate punctele elipsodului sînt cuprinse într-un paralelipiped cu laturile de lungimi finite.

Elipsoidul Σ este o mulțime închisă în spațiu, deoarece $\{1\}$ este închisă în $\mathbb{R}$, iar întreg elipsoidul poate fi privit ca imaginea inversă a lui 1, prin funcția:

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},$$

care este o funcție continuă, deci întoarce închiși în închiși. □

De asemenea, avem și:

Teoremă 8.4: *Intersecția dintre un elipsoid și un plan arbitrar este o elipsă, un punct sau mulțimea vidă.*

Demonstrație. Intersecția dintre un elipsoid și un plan este o curbă de gradul al doilea, adică o conică. Deoarece elipsoidul este o mulțime compactă, fiind închisă și mărginită, rezultă că intersecția trebuie să fie mărginită. Singurele conice mărginite sînt elipsa, punctul și mulțimea vidă. □

8.3 Hiperboloizii

Următoarea cuadrică de care ne ocupăm este *hiperboloidul*.

Vom vedea că există două tipuri de hiperboloizi, de aceea referința este la plural.

Definiţie 8.2: Suprafața $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$, de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, a, b, c > 0$$

se numește *hiperboloid cu o pînză*.

De remarcat, încă din ecuație, este faptul că această suprafață particulară are aceleași simetrii ca și elipsoidul. Intersecțiile hiperboloidului cu planele $x = 0$ și $y = 0$ sînt hiperbole:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 & = 0 \\ x & = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 & = 0 \\ y & = 0. \end{cases}$$

Dacă intersectăm suprafața cu plane de forma $z = k$, obținem elipse asemenea, pentru orice $k \in \mathbb{R}$. Rezultă, așadar, forma din figura de mai jos.

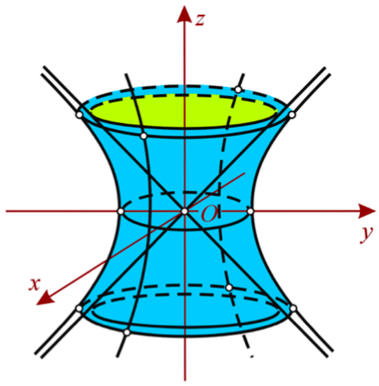

Figura 4: Hiperboloidul cu o pînză

Se observă, din figură, că hiperboloidul cu o pînză este o mulțime nemărginită, deoarece conține două hiperbole și închisă în $\mathbb{R}^3$.

Definiţie 8.3: Suprafața $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, a, b, c > 0$$

se numește *hiperboloid cu două pînze*.

Aceleași simetrii ca și în cazul hiperboloidului cu o pînză se pot remarca și în acest caz. Hiperboloidul cu două pînze are două vîrfuri situate pe axa OZ, iar intersecțiile sale cu planele $x = 0$ și $y = 0$ sînt hiperbolele:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 & = 0 \\ x & = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$$

În regiunea $-c < z < c$ nu avem puncte ale hiperboloidului, iar intersecția suprafeței cu planele $z = k$, cu $|k| \geqslant c$ este dată de elipsele asemenea:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(k^2 - c^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(k^2 - c^2)} - 1 & = 0 \\ z & = k \end{cases}$$

De asemenea, hiperboloidul cu două pînze este o mulțime nemărginită și închisă în $\mathbb{R}^3$ și este schițat în figura de mai jos.

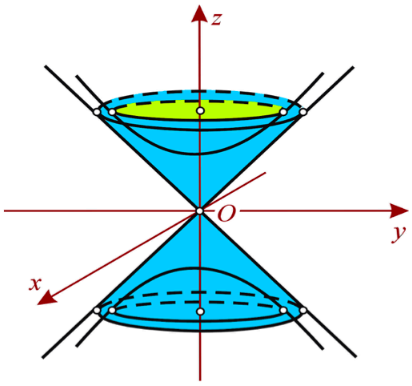

Figura 5: Hiperboloidul cu două pînze

8.4 Paraboloizii

Definiţie 8.4: Suprafața $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, de ecuație:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, a, b > 0$$

se numește *paraboloid eliptic*.

Planele de simetrie $x = 0$ și $y = 0$ se numesc *plane principale*. De asemenea, remarcăm că OZ este axă de simetrie și înțeapă suprafața în origine. Punctul acesta se numește *vîrf*, iar intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele $x = 0$ și $y = 0$ sînt parabolele:

$$\begin{cases} z &= \frac{y^2}{b^2} \\ x &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z &= \frac{x^2}{a^2} \\ y &= 0. \end{cases}$$

Rezultă că paraboloidul eliptic este o suprafață nemărginită. Evident, din ecuația de definiție se vede că paraboloidul eliptic există numai pentru $z \geqslant 0$.

Intersecția paraboloidului cu planele $z = k > 0$ dă elipsele:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= k \\ z &= k. \end{cases}$$

Din aceste considerente, deducem că forma paraboloidului eliptic este ca în figura de mai jos.

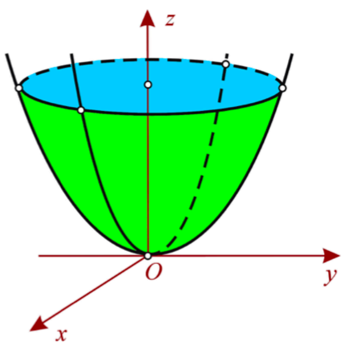

Figura 6: Paraboloidul eliptic

În cazul particular $a = b$, obține paraboloidul de rotație, care se obține prin rotația unei parabole în jurul axei sale. Paraboloidul eliptic este o mulțime nemărginită și închisă în $\mathbb{R}^3$.

Definiţie 8.5: Suprafața Σ de ecuație:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

se numește *paraboloid hiperbolic* sau *suprafață-șa*.

Această suprafață are aceleași simetrii ca și paraboloidul eliptic. Originea este vîrf al suprafeței, iar intersecția cu planul $x = 0$ dă parabola:

$$\begin{cases} z & = -\dfrac{y^2}{b^2} \\ x & = 0, \end{cases}$$

care are concavitatea spre sensul negativ al axei OZ, deoarece $z \leqslant 0$. Intersecția cu planul $y = 0$ ne dă parabola:

$$\begin{cases} z & = \dfrac{x^2}{a^2} \\ y & = 0, \end{cases}$$

care are axa de simetrie OZ și este dirijată în sensul pozitiv al acestei axe.

Dacă intersectăm suprafața cu planele $z = k > 0$, obținem hiperbolele:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} & = k \\ z & = k, \end{cases}$$

care au axa transversă paralelă cu OX.

Dacă intersectăm cu planele $z = k < 0$, obținem hiperbolele:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} & = k \\ z & = k. \end{cases}$$

Așadar, obținem forma din figura de mai jos.

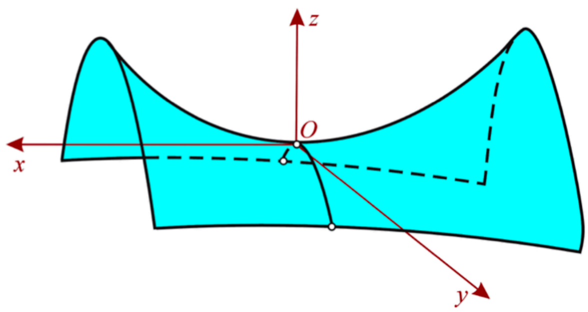

Figura 7: Paraboloidul hiperbolic (suprafață-șa)

Ca mulțime, suprafața este nemărginită și închisă.

8.5 Cilindri, perechi de plane

În acest paragraf, completăm lista cuadricelor definite prin ecuații canonice, cu cazurile speciale care au rămas.

Cuadrica de ecuație:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

se numește *cilindru circular*. Un alt exemplu îl constituie cuadrica de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

care se numește *cilindru eliptic*.

În fine, cuadrica de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

se numește *cilindru hiperbolic*, iar cuadrica de ecuație:

$$y^2 = 2px$$

se numește *cilindru parabolic*.

Alte tipuri speciale de cuadrice includ:

- perechi de plane concurente, de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$$

- perechi de plane paralele, de ecuație $x^2 - a^2 = 0$;
- perechi de plane confundate: $x^2 = 0$;
- dreapta (în spațiu): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$;
- punctul (în spațiu): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$;
- mulțimea vidă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ sau $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ sau $x^2 + a^2 = 0$, cu $a \neq 0$.

8.6 Generatoare rectilinii

În cele ce urmează, vom studia moduri în care o cuadrică poate fi generată, prin diverse metode geometrice. De exemplu, vom vedea că unele cuadrice pot fi generate prin mișcarea unei drepte sau prin mișcarea unor alte tipuri de conice.

Definiţie 8.6: O cuadrică Σ care poate fi generată prin mișcarea unei drepte D care se sprijină pe o curbă C se numește *cuadrică riglată*.

Dreapta D se numește *generatoarea rectilinie* a cuadricei riglate, iar curba C se numește *curbă directoare*.

Definiția poate fi reformulată fără a face uz de dreapta directoare. Într-adevăr, putem numi o cuadrică *riglată* dacă prin orice punct al său trece cel puțin o dreaptă conținută în cuadrică.

O cuadrică se numește *dublu riglată* dacă prin fiecare punct al său trec două drepte distincte, care sînt conținute în cuadrică.

În ce privește cuadricele discutate pînă acum, avem:

Teoremă 8.5: *Hiperboloidul cu o pînză și paraboloidul hiperbolic sînt cuadrice dublu riglate.*

Demonstraţie. Hiperboloidul cu o pînză are ecuația:

$$\Sigma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Această ecuație poate fi rescrisă ca:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\cdot\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Rezultă că avem următoarele familii de drepte incluse în hiperboloidul cu o pînză:

$$D_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c} & =\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) & =1-\frac{y}{b}\end{cases}, \quad D_\infty : \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c} & =0 \\ 1+\frac{y}{b} & =0\end{cases}$$
$$D_\mu : \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c} & =\mu\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) & =1+\frac{y}{b}\end{cases}, \quad D'_\infty : \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{z}{c} & =0 \\ 1-\frac{y}{b} & =0.\end{cases}$$

Mai mult, hiperboloidul poate fi obținut ca reuniune a acestor familii de drepte.

Cu alte cuvinte, familiile de mai sus sînt generatoare rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză.

Să remarcăm simplu că, dacă generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pînză sînt translatate paralel în origine, atunci obținem generatoarele rectilinii ale conului:

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Evident, de aici rezultă că conul este o suprafață simplu riglată.

Similar pentru paraboloidul hiperbolic:

$$\Sigma_2 : z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

poate fi generat de două familii de drepte. Pentru a găsi aceste familii de drepte, transcriem ecuația paraboloidului hiperbolic în forma:

$$z=\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

De aici, rezultă că putem găsi familiile de drepte care sînt incluse în paraboloidul hiperbolic:

$$D_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} & =\lambda z \\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) & =1\end{cases}, \quad D_\infty : \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b} & =0 \\ z & =0\end{cases}$$
$$D_\mu : \begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b} & =\mu z \\ \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) & =1\end{cases}, \quad D'_\infty : \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b} & =0 \\ z & =0.\end{cases}$$

Paraboloidul se realizează ca reuniunea acestor familii de drepte și avem concluzia.

□

Proprietățile esențiale ale familiilor de generatoare pentru cuadricele prezentate au următoarele proprietăți:

Teoremă 8.6: ***Hiperboloidul cu o pînză**:*

(a) Orice două drepte din aceeași familie sînt necoplanare;

(b) O dreaptă din familia D_λ și una din familia D_μ sînt coplanare;

(c) Oricare trei drepte din aceeași familie nu sînt paralele cu același plan

***Paraboloidul hiperbolic**:*

(a) Orice două drepte din aceeași familie sînt necoplanare;

(b) O dreaptă din familia D_λ și una din familia D_μ sînt concurente;

(c) Oricare trei drepte din aceeași familie sînt paralele cu același plan.

Proprietatea de a fi riglat poate fi extinsă și la suprafețe: o suprafață se numește riglată dacă este generată prin mișcarea unei drepte D care se sprijină pe o curbă C.

În acest caz, dacă generatoarea D are ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x &= x_0 + vl \\ y &= y_0 + vm \\ z &= z_0 + vn, v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

atunci suprafața riglată are ecuații parametrice de gradul 1 în v, adică:

$$\begin{cases} x &= x_0(u) + vl(u) \\ y &= y_0(u) + vm(u) \\ z &= z_0(u) + vn(u), (u, v) \in I \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

unde I este un interval convenabil din $\mathbb{R}$.

De remarcat este faptul că are loc și o reciprocă parțială a teoremei de mai sus:

Teoremă 8.7: *Orice suprafață dublu riglată este un plan, un hiperboloid cu o pînză sau un paraboloid hiperbolic.*

Demonstrație. O suprafață riglată este dublu riglată dacă și numai dacă ecuațiile ei parametrice sînt ecuații de gradul 1 în v și de gradul 1 în u, adică arată:

$$\begin{cases} x &= a_0 + a_1 u + v(l_0 + l_1 u) \\ y &= b_0 + b_1 u + v(m_0 + m_1 u) \\ z &= c_0 + c_1 u + v(n_0 + n_1 u), (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Facem următoarea notație:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & l_0 & l_1 \\ b_1 & m_0 & m_1 \\ c_1 & n_0 & n_1 \end{vmatrix}$$

Se impune discuția: dacă $\Delta = 0$, atunci există α, β, γ numere reale, astfel încît:

$$\alpha(x - a_0) + \beta(y - b_0) + \gamma(z - c_0) = 0,$$

ceea ce face ca suprafața studiată să fie un plan, care este o suprafață riglată într-o infinitate de moduri.

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci, prin eliminarea lui u și v, obținem o ecuație de gradul al doilea în (x, y, z). În acest caz, suprafața dublu riglată este o cuadrică, iar singurele cuadrice dublu riglate sînt hiperboloidul cu o pînză și paraboloidul hiperbolic. □

8.7 Cuadrice descrise prin ecuația generală

Descrierea analitică a cuadricelor invită la căutarea spațiului pe care ecuația lor îl generează. Spațiul ambiant în care lucrăm este $\mathbb{R}^3$, dar vom căuta să identificăm mai precis spațiul corespunzător cuadricelor prezentate prin ecuația generală.

Fie o formă pătratică afină $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(x, y, z) =& a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \\ &+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ &+ 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z \\ &+ a_{00}. \end{aligned}$$

Cu aceasta, avem următoarea noțiune:

Definiţie 8.7: Mulțimea de nivel constant zero:

$$\Sigma = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}$$

se numește *cuadrică* sau *suprafață algebrică de ordinul al doilea*.

Aceasta se notează: $\Sigma : g(x, y, z) = 0$.

Ca și în cazul conicelor, remarcăm că toate cuadricele sînt mulțimi închise în spațiu, deoarece sînt imaginea inversă a lui $\{0\}$ – care este mulțime închisă – printr-o funcție continuă, g, polinomială.

Ideea principală a secțiunii prezente și a celor ce vor urma este să vedem moduri prin care o cuadrică poate fi adusă la forma canonică, identificînd (sub)spații corespunzătoare în care această formă are loc. Așadar, se va trece de la reperul cartezian standard $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ orientat pozitiv la un alt reper față de care ecuația $g(x, y, z) = 0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă, care se va numi *ecuația redusă (canonică)*.

Prin această transformare, se va arăta că mulțimea Σ este congruentă cu una din mulțimile: sferă, elipsoid, hiperboloid, paraboloid, con, cilindru, pereche de plane, dreaptă, punct sau mulțime vidă.

Relativ la operațiile de rotație și translație pe care le vom face, cuadricele au următorii invarianți:

$$\begin{aligned}
&\Delta = \det(\overline{A}), \quad \delta = \det(A) \\
&J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&I = \mathrm{tr}(A),
\end{aligned}$$

unde matricele corespunzătoare sînt:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

cu convenția pe care am mai folosit-o, anume $a_{ij} = a_{ji}, i \neq j$.

Acești invarianți vor fi folosiți pentru clasificarea cuadricelor. În primă fază, vom avea:

- Dacă $\Delta = 0$, atunci cuadrica este *degenerată*, fiind o reuniune de plane;
- Dacă $\Delta \neq 0$, atunci cuadrica este nedegenerată.

Dintre cuadricele nevide, sfera, elipsoidul, hiperboloizii și paraboloizii sînt cuadrice nedegenerate, iar conul, cilindrii și perechile de plane sînt cuadrice degenerate.

În cazul sferei, avem o cuadrică pentru care $a_{11} = a_{22} = a_{33} = m$, număr real nenul, iar $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, identificări care rezultă din examinarea ecuației corespunzătoare. De asemenea:

$$\rho = \left(\frac{a_{10}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{30}}{m}\right)^2 - \frac{a_{00}}{m} > 0.$$

Centrul sferei este punctul:

$$\left(-\frac{a_{10}}{m}, -\frac{a_{20}}{m}, -\frac{a_{30}}{m}\right),$$

iar raza sferei este $r = \sqrt{\rho}$.

8.8 Centrul cuadricelor

Ca în cazul conicelor, centrul de simetrie al unei cuadrice este un punct critic al funcției g, adică este soluția sistemului liniar:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x} & = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y} & = a_{12}\,x + a_{22}y + a_{23}\,z + a_{20} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial z} & = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{30} = 0/ \end{cases}$$

Discuția cazurilor posibile:

(1) Dacă $\det(A) = \delta \neq 0$, atunci sistemul liniar de mai sus este compatibil unic determinat. Așadar, cuadrica admite un singur centru de simetrie la distanță finită. Acesta este cazul sferei, elipsoidului, hiperboloizilor și conului;

(2) Dacă $\delta = 0$ și $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$, și unicul determinant caracteristic al sistemului este nenul, atunci sistemul este incompatibil. Cele trei plane reprezentate de cele trei ecuații formează o prismă triunghiulară. Acesta este cazul paraboloidului eliptic și paraboloidului hiperbolic.

(3) Dacă $\delta = 0$, iar determinantul de mai sus este nenul și unicul determinant caracteristic este nul, sistemul liniar este compatibil simplu nedeterminat.

Cele trei plane reprezentate de cele trei ecuații din sistem se intersectează după o dreaptă numită *dreaptă de centre*. Este cazul cilindrilor circulari, eliptici și hiperbolici.

(4) Dacă $\delta = 0$ și rangul sistemului este 1, iar cei doi determinanți caracteristici sînt nenuli, atunci sistemul este incompatibil

Obținem două plane paralele, care este cazul cilindrului parabolic.

(5) Dacă $\delta = 0$, rangul sistemului este 1, iar cei doi determinanți caracteristici sînt nuli, atunci sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Obținem trei plane confundate, iar cuadrica are un plan de centre.

Este cazul planelor paralele distincte sau confundate.

Să vedem un exemplu.

Exemplu 8.1: Fie cuadrica Σ, care conține două puncte, $A(-1,2,3)$ și $B(1,1,-1)$, precum și axa OY și cercul Γ cu centrul în $C(0,0,3)$, fiind tangent axei OX în origine.

Vom scrie ecuația cuadricei, îi determinăm invarianții și coordonatele centrului.

Cercul Γ se află în planul XOZ și are ecuațiile:

$$x^2 + z^2 - 6z = 0, \quad y = 0.$$

Atunci ecuația cuadricei are forma:

$$x^2 + z^2 - 6z + y(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0,$$

deoarece intersecția dintre această suprafață și planul XOZ este cercul Γ.

Deoarece cuadrica conține axa OY, ecuația ei este identitatea pentru $z = 0$ și $x = 0$, de unde rezultă că $\beta = \delta = 0$.

Condițiile $A \in \Sigma$ și $B \in \Sigma$ conduc la sistemul:

$$\begin{cases} \alpha - 3\gamma & = 4 \\ \alpha + \gamma & = 8 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 7, \gamma = 1.$$

Obținem, în fine:

$$\Sigma : x^2 + z^2 + 7xy + yz - 6z = 0.$$

Invarianții corespunzători sînt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{441}{4}.$$

Rezultă că avem o cuadrică nedegenerată. Mai departe, $\delta = -\frac{25}{2}$, deci cuadrica are un centru și $J = -\frac{23}{2}$, iar $I = 2$.

Centrul se află rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} 2x + 7y & = 0 \\ 7x + z & = 0 \\ 2z + y - 6 & = 0. \end{cases}$$

8.9 Reducerea la forma canonică

Vrem să stabilim ecuația canonică a unei cuadrice. Procedăm astfel:

(a) Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, atunci facem o translație și eventual o rotație;

(b) Dacă cel puțin unul dintre numerele a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul, atunci tipul cuadricei este determinat de forma pătratică:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Considerăm matricea (simetrică) atașată acestei forme pătratice, căreia îi determinăm valorile proprii, care sînt reale, precum și vectorii proprii corespunzători, care sunt ortogonali sau pot fi făcuți astfel. Prin urmare, obținem versorii $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Fie R matricea formată de coordonatele acestor versori, aranjate pe coloane. Putem presupune, eventual după o renumerotare sau înlocuirea unuia dintre versori cu opusul său, că $\det(R) = 1$. Atunci:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

reduce forma pătratică la expresia canonică:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Mai departe, direcțiile noilor axe de coordonate sînt date de direcțiile versorilor proprii $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Dacă este cazul, la final se poate face o translație.

Să vedem acestea aplicate pe un exemplu.

Exemplu 8.2: Se dă ecuația:

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0.$$

Vrem să o reducem la forma canonică și să construim cuadrica corespunzătoare.

Considerăm forma pătratică asociată:

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz.$$

Aceasta are matricea asociată:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matricea are valorile proprii reale și distincte, $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$. Vectorii proprii corespunzători vor fi ortogonali, deoarece matricea A este simetrică și are valori proprii distincte.

Versorii proprii obținuți vor fi:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ \vec{e}_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \vec{e}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right). \end{cases}$$

Matricea ortogonală R, ale cărei coloane sînt formate din componentele versorilor proprii are determinantul 1. Facem, atunci, rotația:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Astfel, ecuația carteziană generală devine:

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{36}{\sqrt{6}}z' + 14 = 0.$$

Completăm pătratele și forțăm factorii comuni, obținînd:

$$-2\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3y'^2 + 6\left(z' - \frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2 + 6 = 0.$$

Facem, atunci, translația, în fine:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} + x'', \quad y' = y'', \quad z' = \frac{3}{\sqrt{6}} + z''$$

și obținem ecuația canonică a unui hiperboloid cu două pînze, ale cărui vîrfuri se află pe axa absciselor CX'':

$$-\frac{x''^2}{3} + \frac{y''^2}{2} + \frac{z''^2}{1} + 1 = 0.$$

Reprezentarea geometrică este redată în figura 8.2:

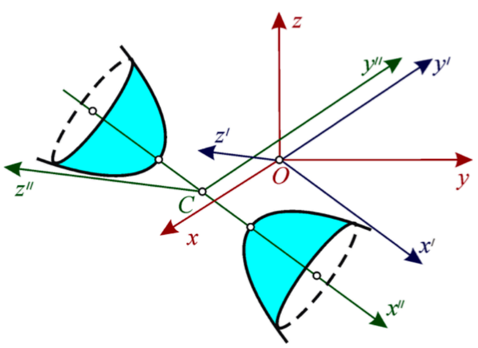

Figura 8: Hiperboloidul cu 2 pînze din exemplu

8.10 Intersecția cu o dreaptă sau un plan

Ca în cazul conicelor, studiem cazurile corespunzătoare intersecțiilor între o cuadrică și o dreaptă sau un plan.

Fie, așadar, D o dreaptă în spațiu de ecuații parametrice:

$$\begin{cases} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt, t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

precum și o cuadrică Σ de ecuație generală $g(x, y, z) = 0$.

Intersecția $D \cap \Sigma$ corespunde rădăcinilor ecuației reale:

$$t^2\varphi(l, m, n) + t(lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0}) + g(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

unde am introdus funcția:

$$\varphi(l, m, n) = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn,$$

iar $g_{x_0} = g_x(x_0, y_0, z_0)$ ș.cl.

Cazurile pe care le distingem sînt următoarele:

(1) Dacă $\varphi(l, m, n) \neq 0$, atunci ecuația corespunzătoare este o ecuație de gradul 2. Introducem notația pentru discriminant:

$$q = (lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0})^2 - 4\varphi(l, m, n)g(x_0, y_0, z_0) > 0,$$

de unde deducem că ecuația are două rădăcini reale distincte, t_1 și t_2.

Astfel, rezultă că dreapta D intersectează cuadrica în două puncte, M_1 și M_2.

Dacă $q = 0$, atunci $t_1 = t_2$. În acest caz, D intersectează Σ în două puncte confundate, caz în care dreapta D se numește *tangentă* la Σ.

Dacă $q < 0$, atunci ecuația nu are rădăcini reale, deci D nu intersectează pe Σ.

(2) Dacă $\varphi(l, m, n) = 0$, atunci ecuația devine una de gradul întîi, pentru care discuția este mai simplă. Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} \neq 0$, atunci avem o soluție unică, deci D intersectează cuadrica Σ într-un singur punct.

Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$, dar $g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, atunci ecuația nu are soluții. În acest caz, dreapta D nu intersectează cuadrica Σ.

Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$ și $g(x_0, y_0, z_0) = 0$, atunci ecuația este o identitate și $D \subseteq \Sigma$.

Fie $M(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ un punct pentru care cel puțin unul din numerele $g_{x_0}, g_{y_0}, g_{z_0}$ este nenul. Această ipoteză este folosită implicit în rezultatele care urmează.

Teoremă 8.8: *Dreapta* D*, de parametri directori* (l, m, n) *este tangentă la cuadrica* Σ *în punctul* $M(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ *dacă și numai dacă* $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$.

Justificarea a fost deja descrisă în cazurile analizate mai sus.

Teoremă 8.9: *Locul geometric al tuturor tangentelor la cuadrica* Σ *în punctul* $M_0 \in \Sigma$ *este planul de ecuație:*

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} + (z - z_0)g_{z_0} = 0.$$

Acest plan se numește planul tangent *la cuadrica* Σ *în punctul* M_0.

De remarcat faptul că ecuația planului tangent într-un punct $M_0 \in \Sigma$ se poate obține și prin dedublarea ecuației $g(x, y, z) = 0$ în punctul M_0. Cu aceasta, ecuația planului tangent este:

$$\begin{aligned} &a_{11}xx_0 + a_{22}yy_0 + a_{33}zz_0 + a_{12}(x_0y + xy_0) + a_{13}(x_0z + xz_0) + a_{23}(y_0z + yz_0) \\ &+ a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{30}(z + z_0) + a_{00} = 0. \end{aligned}$$

Ca în cazul conicelor, cuadrica Σ se numește *netedă* dacă în fiecare punct al său există un plan tangent. Netezimea cuadricei Σ elimină punctele critice, adică acele puncte în care g_x, g_y, g_z, g se anulează simultan (e.g. vîrful unui con).

Dreapta care trece prin $M_0 \in \Sigma$ și este perpendiculară pe planul tangent se numește *normala la* Σ în M_0 și are ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{g_{x_0}} = \frac{y - y_0}{g_{y_0}} = \frac{z - z_0}{g_{z_0}}$$

Intersecția dintre un plan $P : ax + by + cz + d = 0$ și o cuadrică oarecare $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ este descrisă de sistemul anulărilor lor simultane.

Dacă $c \neq 0$, atunci $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ și înlocuim în ecuația cuadricei. Astfel, intersecția $P \cap \Sigma$ se reduce la intersecția dintre planul P și cilindrul de gradul doi, de ecuație $g(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) = 0$, care are generatoarele paralele cu axa OZ; deci $P \cap \Sigma$ este o conică Γ.

Proiecția acestei conice $\Gamma = P \cap \Sigma$ pe planul $XOY : z = 0$ este o conică Γ', descrisă de sistemul:

$$\begin{cases} z & = 0 \\ g(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) & = 0 \end{cases}$$

8.11 Exerciții rezolvate

1. Se dă cuadrica:

$$\Sigma_1 : x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 5x - 1 = 0.$$

(a) Calculați invarianții Δ, δ, J, I;

(b) Aflați centrul de simetrie al cuadricei;

(c) Aduceți cuadrica la forma canonică folosind metoda rotațiilor și translațiilor; obțineți matricea de rotație folosind metoda valorilor proprii.

Soluție: (a) Forma pătratică asociată este:

$$g(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx.$$

Matricea formei pătratice este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Invarianții cuadricei sînt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{33}{2}$$

$$\delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 2 = -4$$

$$I = \operatorname{tr}(A) = 1 - 1 + 1 = 1.$$

Obținem concluzia: cuadrica este nedegenerată ($\Delta \neq 0$) și admite un centru de simetrie, deoarece $\delta \neq 0$.

(b) Centrul de simetrie se determină din sistemul:

$$\begin{cases} g_x & = 0 \\ g_y & = 0 \\ g_z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y - 2z & = 5 \\ -2y - 2x - 2z & = 0 \\ 2z - 2y - 2x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{5}{4} \\ y & = \frac{-5}{4} \\ z & = 0 \end{cases}$$

Așadar, centrul de simetrie este:

$$C_s\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, 0\right)$$

(c) Valorile proprii ale matricei se obțin a fi:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 2.$$

Vectorii proprii, care vor alcătui o bază ortonormată, se obțin:

$$B = \left\{\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \vec{e}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

Relațiile de trecere la noul sistem de coordonate sînt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Înlocuim expresiile obținute ale coordonatelor x, y, z în ecuația cuadricei și rezultă ecuația relativ la noul sistem de coordonate:

$$\Sigma' : x'^2 - 2y'^2 + 2z'^2 - \frac{5}{\sqrt{3}}x' - \frac{5}{\sqrt{6}}y' + \frac{5}{\sqrt{2}}z' - 1 = 0$$
$$\iff \left(x' - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(y' - \frac{5}{4\sqrt{6}}\right) + 2\left(z' + \frac{5}{4\sqrt{2}}\right) - \frac{33}{8} = 0.$$

Facem translațiile corespunzătoare expresiilor din paranteze și obținem:

$$x''^2 - 2y''^2 + 2z''^2 - \frac{33}{8} = 0,$$

de unde obținem, în fine, forma canonică:

$$\frac{x''^2}{33/8} - \frac{y''^2}{33/16} + \frac{z''^2}{33/16} - 1 = 0,$$

deci este vorba despre un hiperboloid cu o pînză.

9 REZUMAT Conice & Cuadrice

9.1 Ecuațiile canonice

9.1.1 Conice

Conica	**Ecuația canonică**
Cerc	$x^2 + y^2 = a^2$
Elipsă	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parabolă	$y^2 = 4ax$
Hiperbolă	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

9.1.2 Cuadrice nedegenerate

Cuadrica	**Ecuația canonică**
Elipsoid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Sferă	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$
Paraboloid eliptic	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$
Paraboloid circular	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-z=0$
Paraboloid hiperbolic	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$
Hiperboloid eliptic cu o pînză	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperboloid circular cu o pînză	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$
Hiperboloid eliptic cu 2 pînze	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
Hiperboloid circular cu 2 pînze	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=-1$

9.1.3 Cuadrice degenerate

Cuadrica	Ecuația canonică
Con eliptic	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Con circular	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$
Cilindru eliptic	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Cilindru circular	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
Cilindru hiperbolic	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Cilindru parabolic	$x^2+2ay=0$

9.2 Conice — Forma canonică

$$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0.$$

Forma matriceală a conicei este:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 9 = 0.$$

Matricea formei pătratice este: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Ecuația caracteristică:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9.$$

Determinăm vectorii proprii:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = (1, -1) \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 4x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = (1, 1) \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Matricea de rotație este:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \det R = 1.$$

Transformarea coordonatelor, conform matricei de rotație:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Conica devine:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot R \cdot A \cdot R^t \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot R^t \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 9 = 0.$$

Prelucrînd ecuația obținută, ajungem la:

$$x'^2 + 9(y' - \sqrt{2})^2 - 9 = 0.$$

Facem schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} X &= x' \\ Y &= y' - \sqrt{2} \end{cases}$$

și ajungem la forma canonică:

$$X^2 + 9Y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{9} + Y^2 - 1 = 0,$$

care este o elipsă.

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0.$$

Scriem ecuația matriceală a conicei:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0.$$

Matricea formei pătratice este $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ecuația caracteristică:

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5.$$

Vectorii proprii se obțin:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = (2, 1) \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1);$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = (1, -2) \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2).$$

Matricea de rotație este:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Cum $\det R = -1$, trebuie să schimbăm vectorii pentru a obține $\det R = 1$. Schimbăm sensul vectorului e_2 în $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$ și acum avem:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \det R = 1.$$

Mai departe, problema continuă similar. Obținem forma canonică:

$$Y^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} X = 0,$$

adică o parabolă.

9.3 Cuadrice — Forma canonică

$$x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0.$$

Considerăm forma pătratică asociată:

$$g = x^2 + 3y^2 + 4yz,$$

care are matricea simetrică.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuația caracteristică rezultă: $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$, deci $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$.

Găsim subspațiile invariante:

$$\begin{aligned} V(\lambda_1) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Similar:

$$\begin{aligned} V(\lambda_2) &= \{(0, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ V(\lambda_3) &= \{(0, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Alegem vectori proprii ortonormați particularizînd elemente din subspațiile invariante. De exemplu:

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1).$$

Matricea R cu acești vectori pe coloane are proprietatea $\det R = 1$, deci este o matrice de rotație. O aplicăm și găsim schimbarea de coordonate:

$$\begin{cases} x &= x' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(y' + 2z') \\ z &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2y' + z') \end{cases}$$

Ecuația cuadricei devine:

$$x'^2 - y'^2 + 4z'^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0.$$

Formăm pătrate și obținem:

$$(x' - 3)^2 - \big(y' - \frac{4}{\sqrt{5}}\big)^2 + 4\big(z' + \frac{2}{\sqrt{5}}\big)^2 - 1 = 0.$$

Efectuăm translația corespunzătoare noilor coordonate și obținem:

$$X^2 - Y^2 + 4Z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 - Y^2 + \frac{Z^2}{\frac{1}{4}} - 1 = 0,$$

adică un hiperboloid cu o pînză.

10 Forma canonică Jordan

Pentru matricele care nu se pot diagonaliza, există o formă mai simplă, numită *forma canonică Jordan*, la care se pot aduce mereu.

Definiţie 10.1: Se numește *celulă Jordan* de ordinul $s \geqslant 1$ atașată scalarului $\lambda \in \Bbbk$ și se notează $J_s(\lambda)$ matricea:

$$J_s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \in M_s(\Bbbk).$$

Se numește *bloc Jordan* o matrice notată $B(\lambda)$, care are pe diagonală celule Jordan, nu neapărat de același ordin, dar cu același scalar λ. Cu alte cuvinte, $B(\lambda) = \operatorname{diag}(J_{s_1}(\lambda), \dots, J_{s_p}(\lambda))$.

O matrice pătratică J cu elemente din $\Bbbk$ se numește *în forma canonică Jordan* dacă este bloc-diagonală, adică are forma

$$J = \operatorname{diag}(B_1(\lambda_1), \dots, B_r(\lambda_r)).$$

De exemplu, matricea de mai jos este în forma canonică Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Definiţie 10.2: Un endomorfism $f : V \to V$ se numește *jordanizabil* dacă există o bază B a lui V astfel încît matricea M_f^B are forma canonică Jordan.

A jordaniza o matrice $A \in M_n(\Bbbk)$ înseamnă a determina o matrice nesingulară $T \in M_n(\Bbbk)$ astfel încît $J = T^{-1}AT$.

Metoda de aducere a unei matrice la forma canonică Jordan se va baza pe următorul rezultat:

Teoremă 10.1: *Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial finit dimensional și $f : V \to V$ un endomorfism. Atunci au loc:*

(a) $\operatorname{Ker} f^i \subseteq \operatorname{Ker} f^{i+1}$, *iar* $\operatorname{Im} f^{i+1} \subseteq \operatorname{Im} f^i, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

(b) Există $i \in \mathbb{N}^*$ astfel încît șirul de incluziuni se stabilizează:

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \dots \subseteq \operatorname{Ker} f^i = \operatorname{Ker} f^{i+1} = \dots \stackrel{\text{not.}}{=\!=} K(f);$$
$$\operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Im} f^2 \supseteq \dots \supseteq \operatorname{Im} f^i = \operatorname{im} f^{i+1} = \dots \stackrel{\text{not.}}{=\!=} I(f);$$

(c) $V \simeq K(f) \oplus I(f)$.

Definiţie 10.3: Subspațiul vectorial $K(f)$ de mai sus se numește *nucleul stabil* al lui f, iar subspațiul vectorial $I(f)$ se numește *imaginea stabilă* a lui f.

De asemenea, în teorema de mai sus, am notat prin f^k *compunerea* lui f cu sine de k ori, dar modul în care se va folosi va fi prin intermediul M_f^B, unde compunerea revine la produsul matriceal.

Teorema de mai sus se utilizează în felul următor. Dacă $f : V \to V$ este un endomorfism ca în teoremă, notăm $g_i = f - \lambda_i \mathrm{Id}_V$, pentru orice valoare proprie λ_i a lui f. Atunci $V(\lambda_i) = K(g_i)$, subspațiul invariant asociat valorii proprii λ_i.

Pașii de urmat sînt:

(1) Se determină polinomul caracteristic $P_f(X) = P_A(X)$;

(2) Fie λ o valoare proprie a lui A, cu ordinul de multiplicitate m, fie $g = f - \lambda \mathrm{Id}_V$ și $M_g^B = A - \lambda I_n$. Se calculează șirul ascendent de nuclee:

$$\mathrm{Ker} g \subseteq \mathrm{Ker} g^2 \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Ker} g^s = K(g) = V(\lambda).$$

Facem notațiile:

$$p_1 = \dim \mathrm{Ker} g^s - \dim \mathrm{Ker} g^{s-1}, p_2 = \dim \mathrm{Ker} g^{s-1} - \dim \mathrm{Ker} g^{s-2}, \ldots p_s = \dim \mathrm{Ker} g$$

și avem relațiile:

$$\begin{aligned} & p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_s \\ & p_1 + p_2 + \cdots + p_s = m = \dim \mathrm{Ker} g^s = \dim V(\lambda). \end{aligned}$$

(3) Alegem vectorii liniar independenți $u_t \in \mathrm{Ker} g^s - \mathrm{Ker} g^{s-1}$, cu proprietatea că $\mathrm{Ker} g^{s-1} \oplus \mathrm{Sp}\{u_t\} = \mathrm{Ker} g^s = V(\lambda)$;

(4) Calculăm $g(u_t) \in \mathrm{Ker} g^{s-1} - \mathrm{Ker} g^{s-2}$ și apoi determinăm vectorii liniar independenți $u_t' \in \mathrm{Ker} g^{s-1} - \mathrm{Ker} g^{s-2}$, cu proprietatea că $\mathrm{Ker} g^{s-2} \oplus \mathrm{Sp}\{g(u_t')\} = \mathrm{Ker} g^{s-1}$ și așa mai departe;

(5) În final, obținem o bază a lui $V(\lambda) = \mathrm{Ker} g$. Fiecărei etape din cele două de mai sus îi corespunde un bloc Jordan de mărime egală cu numărul de vectori aleși;

(6) Se repetă etapele pentru fiecare valoare proprie și se obțin bazele pentru fiecare $V(\lambda_i)$;

(7) Deoarece $V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_t)$, rezultă că baza dată de reuniunea bazelor subspațiilor invariante este bază pentru V. Fie T matricea de trecere de la baza canonică (B) la această bază (B'). Atunci avem relația finală:

$$M_f^{B'} = T^{-1} M_f^B T = \mathrm{diag}(B_1(\lambda_1), \ldots, B_t(\lambda_t)),$$

unde fiecare bloc diagonal $B_i(\lambda_i)$ este format din atîtea celule Jordan cît este $\dim V(\lambda_i)$.

Exemplu rezolvat: Fie endomorfismul:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (3x + y - z, 2y, x + y + z).$$

Îi vom aduce matricea la forma canonică Jordan. Avem:

$$M_f^{B_c} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_f(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda - 2)^2.$$

Subspațiul propriu asociat acestei valori proprii este:

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 2(x, y, z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \\ &= \mathrm{Sp}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \end{aligned}$$

deci $\dim V(2) = 2$, de unde rezultă că vom avea 2 celule Jordan corespunzătoare acestei valori proprii.

Șirul ascendent de nuclee, pentru $g = f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, este:

$$\mathrm{Ker}\, g \subseteq \mathrm{Ker}\, g^2 = V^\lambda = \mathbb{R}^3.$$

Deoarece $\dim V^\lambda - \dim V(\lambda) = 3 - 2 = 1$, avem un singur vector $u_1 \in V^\lambda - V(\lambda)$, iar la pasul următor, avem 2 vectori:

- $u_1 \in V^\lambda - V(\lambda)$;
- $g(u_1) = u_2$ și $u_3 \in V(\lambda)$ astfel încît $\{u_2, u_3\}$ să fie bază a lui $V(\lambda)$.

Fie $u_1 = (0, 1, 0) \in V^\lambda - V(\lambda)$, iar $u_2 = g(u_1) = (1, 0, 1)$. Atunci putem alege $u_3 = (0, 1, 1)$ și avem:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_f^B = T^{-1} M_f^{B_c} T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exerciții propuse:

Să se aducă la forma canonică Jordan matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$