Seminar 7
Spații euclidiene
Completări și exerciții suplimentare

1 Distanță

În geometria plană, distanța între vectorii $\vec{v}$ și $\vec{w}$ se calculează prin $|\vec{v} - \vec{w}|$. De fapt, făcînd un pas și mai în spate, ne putem aminti de distanța între două puncte de pe axă (vectori într-un spațiu 1-dimensional), calculată prin modulul diferenței acestora.

Așadar, într-un spațiu euclidian arbitrar, putem generaliza această noțiune astfel:

Definiţie 1.1: Fie V un spațiu euclidian arbitrar și $x, y \in V$. Se definește *distanța* între vectorii x, y prin formula:

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

unde în membrul drept apare funcția *normă*, indusă în mod unic de produsul scalar.

Observaţie 1.1: Se poate arăta că, dacă gîndim V ca un spațiu topologic, atunci funcția distanță de mai sus satisface proprietățile unei *metrici*. Așadar, spațiul euclidian devine chiar spațiu metric.

2 Morfismul adjunct. Matricea lui Gram

Ne referim la următoarea definiție:

Definiţie 2.1: Fie V un spațiu euclidian și $f : V \to V$ o aplicație liniară.

Se numește *adjuncta aplicației* f aplicația $f^* : V \to V$, cu proprietatea:

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle, \forall x, y \in V.$$

Modul în care se calculează adjuncta aplicației folosește *matricea lui Gram*:

Definiţie 2.2: Fie V un spațiu euclidian n-dimensional și $B = \{b_i\}$ o bază a sa.

Matricea $G \in M_n(\mathbb{R})$, definită prin $G = (g_{ij}) = \big(\langle b_i, b_j \rangle\big)$ se numește *matricea lui Gram* (sau *„gramiană“*).

De remarcat faptul că *matricea Gram este inversabilă*, în orice bază și indiferent de produsul scalar, deoarece, din chiar definiția produsului scalar, diagonala principală a matricei Gram conține produsul pătratelor normelor elementelor din bază.

De exemplu, pentru spațiul euclidian $V = \mathbb{R}^2$, cu produsul scalar canonic

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

matricea gramiană este I_2, deoarece $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, simbolul lui Kronecker (nul pentru $i \neq j$ și 1 pentru $i = j$).

Folosind matricea gramiană, putem calcula simplu morfismul adjunct. Deoarece orice vector dintr-un spațiu vectorial arbitrar se scrie în funcție de vectorii bazei și folosind proprietățile produsului scalar, se poate arăta că în orice spațiu euclidian V avem:

$$\langle v, w \rangle = v^t \cdot G \cdot w, \forall v, w \in V, \tag{1}$$

unde G este matricea lui Gram.

Fie $f : V \to V$ o aplicație liniară, căreia vrem să-i determinăm adjuncta. Fie A matricea aplicației f într-o bază $B = \{b_i\}$ a lui V. Atunci, a căuta f^* este echivalent cu a căuta A^*, iar definiția morfismului adjunct se poate rescrie cu matrice în forma:

$$\langle v, A^* w \rangle = \langle Av, w \rangle.$$

Atunci, folosind relația (1), avem că:

$$v^t G A^* w = (Av)^t G w \Rightarrow (v^t G A^* - v^t A^t G) w = 0.$$

Cum relația are loc pentru w arbitrar, rezultă:

$$v^t G A^* - v^t A^t G = 0,$$

iar această relație are loc pentru orice v, deci $GA^* = A^t G$, de unde, în fine:

$$A^* = G^{-1} A^t G.$$

3 Exerciții

1. Fie subspațiul:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 0 \end{cases}\}$$

al spațiului euclidian $\mathbb{R}^4$.

Să se determine $V^\perp$ și să se verifice că $V \oplus V^\perp \simeq \mathbb{R}^4$.

2. Fie spațiul vectorial $V = \mathbb{C}^2$ și $B = \{e_1, e_2\}$ baza canonică. Definim produsul scalar:

$$\langle x, y \rangle = 2x_1\overline{y}_1 - ix_1\overline{x}_2 + ix_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2,$$

unde $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$, iar $\overline{x}$ notează conjugatul complex.

Fie $f : V \to V$ dată de matricea $M_f^B = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$.

Să se determine endomorfismul adjunct f^*.

3. Fie spațiul vectorial $V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 3x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. Să se determine $V^\perp$ și coordonatele vectorului $v = (1, -1, 4)$ în V și $V^\perp$.

4. Fie spațiul vectorial $M_2(\mathbb{R})$ și produsul scalar dat de:

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^t B).$$

(a) Să se determine matricele de normă 1, ortogonale simultan pe:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Să se completeze mulțimea $\{B, C\}$ la o bază a lui $M_2(\mathbb{R})$ și să se ortonormeze baza, în raport cu produsul scalar definit mai sus.

5. În fiecare din spațiile euclidiene V de mai jos, determinați adjunctul morfismului f definit, relativ la produsul scalar indicat:

(a) $V = \mathbb{R}^2, \langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2, f(x, y) = (2x + y, x - y)$;

(b) $V = \mathbb{R}^2, \langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$, iar aplicația $f(x, y) = (3x, -y)$;

(c) $V = \mathbb{R}_2[X], \langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{2}(k!)^2 a_k b_k$, unde $p = a_0 + a_1X + a_2X^2$, iar $q = b_0 + b_1X + b_2X^2$. Definim aplicația: $f(a + bX + cX^2) = (a + b) + (b + c)X + (a + c)X^2$.