Seminar 6
Spații euclidiene

1 Produs scalar

Spațiile euclidiene lărgesc definițiile spațiilor vectoriale generale, adăugînd construcții foarte utile în perspectiva aplicațiilor în geometrie.

Prima definiție importantă este:

Definiţie 1.1: Fie V un spațiu vectorial real. Se numește *produs scalar* pe V o aplicație $\langle \cdot, \mathrm{cdot} \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, care, pentru orice vectori $x, y, z \in V$ și orice scalar $\alpha \in \mathbb{R}$ are proprietățile:

- *comutativitate:* $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- *aditivitate:* $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$;
- *balansare:* $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
- *pozitivitate:* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Cu această construcție, avem:

Definiţie 1.2: Un spațiu vectorial real pe care s-a definit un produs scalar se numește *spațiu prehilbertian (real)*. [1]

Dacă spațiul este finit dimensional, el se numește *euclidian*.

În continuare, vom presupune că spațiul V pe care îl folosim este un spațiu euclidian.

Ca în geometrie, numim doi vectori $x, y \in V$ *ortogonali* dacă $\langle x, y \rangle = 0$. Vom mai nota aceasta și prin $x \perp y$.

Folosind noțiunea de produs scalar, putem defini, pentru orice vectori $x \in V$, aplicația *normă*, definită prin:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Această aplicație generalizează noțiunea de *modul* al unui vector.

Exemplele pe care le vom întîlni cel mai des sînt:

- Pentru spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$, produsul scalar standard este:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$

  unde $x = (x_1, \dots, x_n)$, iar $y = (y_1, \dots, y_n)$;

- Pentru spațiul de matrice $M_{m,n}(\mathbb{R})$, putem defini produsul scalar:

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^t \cdot B).$$

- Pentru $V = C^0([a, b])$, spațiul vectorial al tuturor funcțiilor continue de forma $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definim:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx,$$

  structură cu care obținem un spațiu prehilbertian infinit dimensional.

[1] Denumirea provine de la matematicianul german David Hilbert (1862—1943), iar particular *pre-* arată că aceste spații sînt utilizate pentru a obține *spațiile Hilbert*, extrem de importante în fizica teoretică. Ele adaugă și proprietăți de analiză vectorilor, studiind, de fapt, *spații vectoriale de funcții*.

În contextul unui spațiu euclidian, au loc relațiile cunoscute din cazul geometriei plane:

- $\forall x, y \in V, |\langle x, y\rangle| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$ (inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz);
- $\forall x, y \in V, ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (regula paralelogramului);
- Dacă $x \perp y$, atunci $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (teorema lui Pitagora).

În cazul spațiilor complexe, se impun modificări la definiții.

Definiţie 1.3: Fie V un spațiu vectorial complex. Se numește *produs scalar* pe V o aplicație $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, care, pentru orice vectori $x, y, z \in V$ și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$, are proprietățile:

- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, unde prin $\overline{()}$ am notat conjugata complexă;
- $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$;
- $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;
- $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $x = 0$.

Observaţie 1.1: Remarcați că, folosind prima și a treia proprietate, obținem:

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Cu aceasta, avem:

Definiţie 1.4: Un spațiu vectorial complex, pe care s-a definit un produs scalar se numește *spațiu prehilbertian complex*.

Spațiile prehilbertiene complexe cu dimensiune finită se numesc *spații unitare*.

Exemplele din cazul real pot fi adaptate:

- Fie $V = \mathbb{C}^n$. Atunci, cu notațiile de mai sus, produsul scalar se poate defini prin:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}.$$

- În spațiul vectorial complex al funcțiilor continue $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, putem defini produsul scalar complex prin:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

2 Ortonormare

Date aceste noțiuni, pornind cu conceptul de produs scalar, utilizările pe care le vom studia sînt în următoarea direcție:

Definiţie 2.1: Fie V un spațiu prehilbertian (real sau complex).

- Un sistem finit sau numărabil $\{e_i\}$ de vectori din V se numește *sistem ortogonal* dacă toți vectorii sînt nenuli și ortogonali doi cîte doi.
- Sistemul se numește *ortonormat* dacă este ortogonal, iar norma („lungimea“) fiecărui vector este 1.

Cazul care ne interesează este acela în care sistemul de vectori de mai sus este o *bază* pentru V, situație în care se numește *bază ortonormată*. [2]

Dată o bază „obișnuită" a unui spațiu vectorial (euclidian sau unitar), din ea se poate obține una *ortonormată*, folosind **procedeul Gram-Schmidt**.

Fie $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ o bază oarecare în V. Construim din ea o bază *ortogonală* $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, apoi o normăm, înmulțind fiecare vector cu inversul normei sale, obținînd baza *ortonormată* $B_2 = \{\frac{v_i}{||v_i||}\}$.

Procedeul pornește astfel:

- Luăm $v_1 = u_1$;
- Mai departe, definim $v_2 = u_2 + \alpha v_1$, cu α ales astfel încît $v_2 \perp v_1$. Din această condiție, găsim:

$$\alpha = -\frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}.$$

- În continuare, luăm $v_3 = u_3 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, cu $\alpha_{1,2}$ astfel încît $v_3 \perp v_1$ și $v_3 \perp v_2$. Se obțin:

$$\alpha_1 = -\frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}, \quad \alpha_2 = -\frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle}.$$

- Procedeul continuă similar pînă obținem baza B_1, pe care apoi o normăm.

3 Complement ortogonal

Extindem noțiunea de ortogonalitate la spații.

Definiţie 3.1: Fie E un spațiu euclidian (sau unitar) cu $\dim E = n < \infty$ și V un subspațiu vectorial al lui E, cu $\dim V = p$, astfel încît $1 \leqslant p \leqslant n - 1$.

Se numește *complementul ortogonal* al lui V, notat $V^\perp$, un subspațiu $V^\perp \subseteq E$, astfel încît $V \oplus V^\perp = E$ și $V \perp V^\perp$, adică $\forall x \in V, \forall y \in V^\perp, x \perp y$.

În calcule, ne vom baza pe următoarea:

Teoremă 3.1: *Fie E un spațiu euclidian (unitar). Pentru orice subspațiu vectorial nenul $V \subseteq E$, există și este unic complementul ortogonal $V^\perp$ al lui V.*

Așadar, următoarele proprietăți vor fi fundamentale în exercițiile de determinare a complementului ortogonal al unui spațiu. Fie $S \hookrightarrow V$. Atunci:

- $S \oplus S^\perp \simeq V$, deci (cf. Grassmann):

$$\dim S + \dim S^\perp = \dim V.$$

- $(S^\perp)^\perp \simeq S$;
- Putem scrie matricea formată din vectorii bazei lui S și căutăm vectorii bazei lui $S^\perp$ (tot matriceal), astfel încît produsul celor două matrice să fie nul. Problema se reduce, astfel, la un sistem de ecuații omogene.

Avem nevoie și de:

Definiţie 3.2: Fie E un spațiu euclidian (unitar). Un endomorfism $f : E \to E$ se numește *ortogonal (unitar)* dacă duce baze ortonormate în baze ortonormate.

[2] Acesta este, de fapt, cazul din geometria tridimensională, „clasică". Baza este dată de versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, care sînt ortonormați.

Pentru ele, avem următoarea:

Teoremă 3.2: *Dacă E este un spațiu euclidian (unitar), iar $f : E \to E$ este un endomorfism, următoarele afirmații sînt echivalente:*

(a) *f este ortogonal (unitar);*

(b) $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$;

(c) *matricea lui f, scrisă în orice bază ortonormată, este inversabilă, iar $(M_f^B)^{-1} = (M_f^B)^t$ (respectiv $\overline{(M_f^B)^t}$ pentru cazul complex).*

De fapt, putem defini în general:

Definiţie 3.3: O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ se numește *simetrică* atunci cînd $A = A^t$ și *ortogonală* cînd $A^{-1} = A^t$.

Pentru cazul complex, o matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ se numește *hermitică* [3] atunci cînd $A = \overline{A^t}$ și *unitară* dacă este inversabilă și $A^{-1} = \overline{A^t}$.

Se poate demonstra simplu că:

- Matricea asociată unui endomorfism ortogonal într-o bază ortonormată este ortogonală;
- Dacă A este ortogonală, atunci $\det A = \pm 1$;
- Matricea asociată unui endomorfism unitar într-o bază ortonormată este unitară;
- Dacă A este unitară, atunci $|\det A| = 1$.

4 Exerciții

1. Aplicați algoritmul Gram-Schmidt pentru:

(a) Baza $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1), (3, -1, -1), (0, -1, 1)\}$ a spațiului $\mathbb{R}^3$;

(b) Baza $\mathcal{B} = \{(0, 1, -1), (2, 0, 1), (-1, 1, -1)\}$ a spațiului $\mathbb{R}^3$.

2. Fie $V = \mathbb{R}_3[X]$. Definim aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ prin:

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{3} (k!)^2 a_k b_k,$$

unde $p = \sum a_i X^i$ și $q = \sum b_j X^j$.

(a) Arătați că aplicația este un produs scalar;

(b) Calculați $||h||$, unde $h = 1 + 5x - 4x^2 + 5x^3$.

3. Fie $C = \mathcal{C}^\infty([1, e])$ și aplicația definită prin:

$$\langle f, g \rangle = \int_1^e f(x) g(x) \ln x dx.$$

[3] Charles Hermite (1822–1901) [wiki].

(a) Arătați că aplicația este un produs scalar;

(b) Calculați $||h||$, pentru $h : [1, e] \to \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x}$;

(c) Aflați o funcție de gradul întîi g care să fie perpendiculară pe funcția constantă $f(x) = 5$ (în raport cu produsul scalar de mai sus).

4. Fie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.

(a) Determinați $S^\perp$;

(b) Fie vectorul $v = (1, 4, 5)$. Găsiți coordonatele lui v în S, respectiv în $S^\perp$.

5. Calculați complementul ortogonal al subspațiului al $\mathbb{R}^4$, generat peste $\mathbb{R}$ de vectorii

$$(1, 3, 0, 2), (3, 7, -1, 2), (2, 4, -1, 0).$$

6. În spațiul $\mathbb{R}_2[X]$ se consideră vectorii:

$$p_1 = 3x^2 + 2x + 1$$
$$p_2 = 3x^2 + 2x + 5$$
$$p_3 = -x^2 + 2x + 1$$
$$p_4 = 3x^2 + 5x + 2.$$

Să se determine un polinom p echidistant de vectorii p_1, p_2, p_3, p_4, în raport cu distanța euclidiană.

7. În spațiul $\mathbb{R}^4$, se consideră vectorii:

$$x = (1, 0, 1, 3), \quad y = (-1, 1, 1, 0).$$

Să se completeze acești vectori pînă la o bază ortogonală, apoi să se normeze baza rezultată.

8. Se consideră subspațiul $S = Sp(x_1, x_2, x_3) \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, unde:

$$x_1 = (1, 1, 2, 1), x_2 = (-1, 0, 2, 3), x_3 = (1, 2, -1, -3).$$

(a) Găsiți un vector $v \in \mathbb{R}^4$, astfel încît $v \perp S$;

(b) Găsiți $S^\perp$.

9. Să se determine o bază ortonormată a subspațiului:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^4.$$