Seminar 5
Vectori și valori proprii

1 Vectori și valori proprii

Fie V un spațiu vectorial peste un corp $\Bbbk$ și $f : V \to V$ o aplicație liniară.

Definiţie 1.1: Un vector $v \in V$ se numește *vector propriu* (eng. *eigenvector*) pentru aplicația f dacă există un scalar $\lambda \in \Bbbk$ astfel încît $f(v) = \lambda \cdot v$.

În acest caz, λ se numește *valoarea proprie* (eng. *eigenvalue*) asociată vectorului propriu v.

Așadar, vectorii proprii sînt aceia pentru care aplicația are o acțiune simplă, de „rescalare", adică doar înmulțire cu un scalar, care se numește valoarea proprie asociată.

În exerciții, pentru a găsi valorile proprii asociate unei aplicații liniare ca mai sus (endomorfism), se procedează astfel:

- Presupunem că $\dim_{\Bbbk} V = n$. Scriem matricea aplicației f în baza canonică a lui V, $M^B(f) \in M_n(\Bbbk)$;
- Scriem *polinomul caracteristic* al matricei, anume:

$$P(x) = \det(A - x \cdot I_n).$$

- Rădăcinile polinomului caracteristic se vor nota cu λ_i și sînt valorile proprii ale endomorfismului.

Mulțimea valorilor proprii se mai numește *spectrul* endomorfismului f, notat uneori cu $\sigma(f)$.

Apoi, pentru a găsi vectorii proprii asociați valorilor proprii de mai sus se rezolvă, pentru fiecare λ_i, ecuația $f(v) = \lambda_i v$ și se găsește v.

Cu ajutorul acestor vectorii proprii, obținem următoarele:

Definiţie 1.2: Fie λ o valoare proprie a unui endomorfism f.

Dacă v este un vector propriu asociat valorii proprii λ, $V(\lambda) = V_\lambda = Sp(v)$ este un subspațiu al lui V, numit *subspațiul invariant* (propriu) generat de v.

Pentru o valoare proprie λ, se definesc:

Definiţie 1.3: Fie λ o valoare proprie a endomorfismului f. Se numește *multiplicitatea algebrică* a lui λ, notată $m_a(\lambda)$ sau a_λ puterea la care apare factorul $(X - \lambda)$ în descompunerea polinomului caracteristic al lui f.

Se numește *multiplicitatea geometrică* a lui λ, notată $m_g(\lambda)$ sau g_λ dimensiunea subspațiului V_λ.

Au loc următoarele proprietăți utile:

Propoziţie 1.1: *Fie A matricea endomorfismului f și fie λ_i valorile sale proprii.*

- *Suma valorilor proprii (cu tot cu multiplicități) este egală cu urma matricei, iar produsul lor este egal cu determinantul matricei.*

  În particular, dacă 0 este valoare proprie, atunci A este neinversabilă;
- *λ_i^k este valoare proprie pentru A^k, pentru orice $k \geqslant 1$;*
- ***(Teorema Cayley-Hamilton)** $P_A(A) = 0$, unde P_A este polinomul caracteristic al matricei A.*

2 Diagonalizare

Definiţie 2.1: O matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ se numește *diagonalizabilă* dacă ea este asemenea cu o matrice diagonală D, i.e. care are elemente nenule doar pe diagonala principală.

Altfel spus, există $T \in M_n(\mathbb{k})$ inversabilă, astfel încît $T^{-1}AT = D$.

Observaţie 2.1: Dacă A este diagonalizabilă, atunci D (din definiția de mai sus) conține pe diagonală doar valorile proprii ale lui A.

Pașii pentru verificarea și obținerea diagonalizării unei matrice sînt:

(1) Fixăm o bază B oarecare a lui V și scriem matricea lui f în baza B;

(2) Determinăm valorile proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, cu ordinele de multiplicitate $n_1, \dots, n_p$;

(3) Pentru fiecare valoare proprie λ_i, se determină subspațiul propriu (invariant) V_{λ_i} și o bază a sa, B_i;

(4) Dacă există o valoare proprie λ_i, astfel încît $\dim V_{\lambda_i} \neq n_i$, algoritmul se oprește, deoarece matricea nu se poate diagonaliza;

(5) În caz contrar, dacă avem $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$, atunci matricea se poate diagonaliza, iar $B' = B_1 \cup \dots \cup B_p$ este o bază a spațiului V, formată din vectori proprii;

(6) Se determină matricea T, de trecere de la baza B la baza B', care este inversabilă. În plus, obținem:

$$M^{B'}(f) = T^{-1}M^B(f)T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p),$$

adică o matrice diagonală cu valorile proprii λ_i pe diagonală.

3 Exerciții

1. Să se determine vectorii și valorile proprii pentru matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie aplicația liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (-y, x, z)$.
Să se calculeze vectorii și valorile proprii ale lui f.

3. Fie aplicația liniară:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - z, 8x + y - 2z, z).$$

Să se calculeze vectorii și valorile proprii ale lui f.

4. Fie aplicația liniară $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, definită prin:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + d & 2b + 4c + 5d \\ 2c + d & 8d \end{pmatrix}$$

Să se arate că f nu este diagonalizabilă.

5. Să se diagonalizeze endomorfismul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin:

$$f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y).$$

6. Să se diagonalizeze matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

și apoi, folosind forma diagonală, să se calculeze A^n, cu $n \in \mathbb{N}$.

7. Aceeași cerință pentru matricele:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Determinați vectorii și valorile proprii pentru aplicațiile:

(a) $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3, f(P) = 2P'$;

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(a, b, c) = (a - b + c, b, b - c)$.

9. Să se diagonalizeze endomorfismul $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definit prin:

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t, x - y + z - t, x - y - z + t).$$