Seminar 4
Matricea unei aplicații liniare. Utilizări

1 Matricea unei aplicații liniare

Există o foarte strînsă legătură între matrice și aplicații liniare, definite pentru orice spațiu vectorial. De aceea, așa cum vom vedea, multe din noțiunile pe care le știm de la spații vectoriale cu ajutorul aplicațiilor liniare pot fi reformulate în contextul matricelor.

Punctul de pornire este următorul.

Definiție 1.1: Fie V și W două spații vectoriale peste același corp comutativ $\mathbb{k}$.

Definim mulțimea:

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ aplicație liniară } \}.$$

Se arată că $\mathcal{L}(V, W)$ devine chiar un spațiu vectorial peste $\mathbb{k}$, cu operațiile:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \forall v \in V, \forall f, g \in \mathcal{L}(V, W);$$
$$(\alpha f)(v) = f(\alpha v), \forall \alpha \in \mathbb{k}, f \in \mathcal{L}(V, W), v \in V.$$

În plus, se poate demonstra următoarea teoremă:

Teoremă 1.1: *În contextul și cu notațiile de mai sus, dacă* $\dim V = n, \dim W = m$, *atunci* $\dim \mathcal{L}(V, W) = m \cdot n$. *În particular,* $\mathcal{L}(V, W) \simeq M_{m,n}(\mathbb{k})$.

Rezultă, așadar, că oricărei aplicații liniare i se poate asocia în mod unic o matrice. Este vorba despre *matricea aplicației într-o bază*, definită astfel.

Să luăm un exemplu particular. Considerăm spațiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ și baza sa canonică, $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

Fie aplicația liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (3x - 5y, 2z - x)$.

Matricea aplicației f în baza B, notată $M^B(f)$, se definește prin $(f(e_i))^t$. Adică se calculează f în fiecare element al bazei, iar vectorii obținuți devin *coloanele* matricei rezultate. Concret:

$$\begin{cases} f(e_1) & = (3, -1) \\ f(e_2) & = (-5, 0) \\ f(e_3) & = (0, 2) \end{cases} \Rightarrow M^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Această corespondență este foarte utilă, deoarece, ulterior, în loc să calculăm valoarea aplicației f într-un vector, se poate *înmulți matricea aplicației cu vectorul respectiv* (pe coloană, așa cum are sens produsul de matrice).

De exemplu, dacă luăm, în cazul de mai sus, vectorul $v = (1, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$, se arată prin calcul direct că:

$$f(v) = (8, 5) = M^B(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercițiu: Verificați egalitatea de mai sus!

2 Schimbarea matricei la schimbarea bazei

Dacă avem o aplicație liniară $f : V \to W$ și două baze fixate în cele două spații, atunci matricea lui f în raport cu cele două baze se obține exprimînd imaginea primei baze în raport cu cea de-a doua.

De exemplu, fie aplicația:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2) = (3x_1 - 3x_2, x_1 + 2x_2, x_1 - x_2).$$

Considerăm bazele

$$B_1 = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

și

$$B_2 = \{w_1 = (1,0,0), w_2 = (0,1,0), w_3 = (0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Atunci, *matricea lui* f *în raport cu cele două baze* se obține din calculul:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (-1,3,0) = -1 \cdot w_1 + 3 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 \\ f(v_2) &= (5,-1,2) = 5 \cdot w_1 - 1 \cdot w_2 + 2 \cdot w_3. \end{aligned}$$

Așadar, avem:

$$^{B_1}M^{B_2}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Definim acum următorul concept:

Definiţie 2.1: Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și B_1, B_2 două baze ale sale.

Matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 are drept coloane coordonatele vectorilor din baza B_1 scriși în funcție de baza B_2.

De exemplu, să luăm $V = \mathbb{R}^3$ și baza canonică $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, precum și baza $B_2 = \{v_1 = (-1,2,1), v_2 = (0,-1,-1), v_3 = (1,1,1)\}$ (**Exercițiu:** verificați că B_2 este, într-adevăr, bază!).

Atunci avem:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \\ e_2 &= (0,1,0) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 \\ e_3 &= (0,0,1) = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3. \end{aligned}$$

Rezultă trei sisteme:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_3 & = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -\beta_1 + \beta_3 & = 0 \\ 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 & = 1 \\ \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 & = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -\gamma_1 + \gamma_3 & = 0 \\ 2\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 & = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 & = 1 \end{cases}$$

Matricea de trecere va fi, atunci:

$$^{B_1}M^{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Exercițiu: Finalizați calculele pentru exercițiul de mai sus! (Determinați explicit coordonatele $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și matricea $^{B_1}M^{B_2}$.)

Cu aceasta, avem următorul rezultat:

Teoremă 2.1: *Fie* A *matricea unei aplicații liniare în baza* B *a unui spațiu vectorial. Fie* B' *o altă bază și* S *matricea de trecere de la baza* B *la baza* B'.

Atunci matricea aplicației se schimbă după formula:

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

În cazul schimbării bazelor în domeniul și codomeniul unei aplicații liniare, avem rezultatul:

Teoremă 2.2: *Fie* V, W *două* $\mathbb{k}$*-spații vectoriale, cu* $\dim V = n, \dim W = m$ *și fie* $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

Fie $B_1 = \{v_i\}$ *și* $\overline{B}_1 = \{\overline{v}_u\}$ *două baze în* V *și* $B_2 = \{w_j\}$*, respectiv* $\overline{B}_2 = \{\overline{w}_j\}$ *două baze în* W.

Fie A *matricea de trecere de la* B_1 *la* $\overline{B}_1$ *și* B *matricea de trecere de la* B_2 *la* $\overline{B}_2$.

Atunci are loc relația:

$$^{\overline{B}_1}M^{\overline{B}_2}(f) = B^{-1} \cdot {}^{B_1}M^{B_2}(f) \cdot A.$$

Modificarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei se face conform:

Teoremă 2.3: *Fie* $x \in V$ *un vector care are coordonatele* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *în baza* B *și coordonatele* $\mathbf{x'} = (x_1', \dots, x_n')$ *în baza* B' *ale spațiului vectorial* V.

Fie A *matricea de trecere de la baza* B *la baza* B'.

Atunci legătura între coordonate este dată de:

$$\mathbf{x'}^t = A^{-1} \cdot \mathbf{x}.$$

Mai definim:

Definiţie 2.2: Două matrice $P, Q \in M_n(\mathbb{k})$ se numesc *asemenea* dacă există o matrice inversabilă A astfel încît:

$$Q = A^{-1} \cdot P \cdot A.$$

Notăm relația de asemănare prin "$\sim$", deci $P \sim Q$.

Exercițiu: Arătați că relația de asemănare a matricelor pătratice de un ordin n dat este o relație de echivalență (reflexivă, simetrică, tranzitivă).

Folosind cele de mai sus, rezultă:

(1) Două matrice asemenea au același rang.

(2) Matricele asociate unei aplicații liniare $f : V \to V$ în două baze diferite ale lui V sînt asemenea. Are loc și rezultatul reciproc.

3 Exerciții

1. Fie transformarea liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definită prin:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3).$$

(a) Verificați teorema rang-defect;

(b) Găsiți matricea aplicației f în baza canonică a $\mathbb{R}^3$;

(c) Arătați că $B' = \{v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (0, -1, 2), v_3 = (-1, 1, -1)\}$ este bază a lui $\mathbb{R}^3$;

(d) Găsiți matricea lui f în baza B';

(e) Găsiți matricea de trecere de la baza canonică B la baza B'

2. Fie transformarea liniară $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, definită prin:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3).$$

(a) Verificați teorema rang-defect;

(b) Fie bazele:

$$B_1 = \{u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (-1, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
$$B_2 = \{v_1 = (0, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0, 1), v_4 = (1, 1, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Găsiți matricele de trecere de la bazele canonice la B_1, respectiv B_2;

(c) Determinați matricea aplicației f în baza B_1, față de baza canonică din $\mathbb{R}^4$;

(d) Determinați matricea aplicației f în baza B_1, față de baza B_2.

3. Fie $V = \mathbb{R}[X]_2$ și mulțimea:

$$B' = \{p_1 = 3X^2 + 2, p_2 = X - 5, p_3 = X^2 + 4\}.$$

(a) Arătați că B' este bază a lui V;

(b) Determinați matricea de trecere de la baza canonică la baza B';

(c) Fie $f : V \to \mathbb{R}[X]_1$ morfismul de derivare (în raport cu X). Determinați matricea lui f în baza canonică a lui V, față de baza canonică alui $\mathbb{R}[X]_1$, precum și matricea lui f în baza B' a lui V față de baza $B'' = \{q_1 = 7, q_2 = X - 2\}$ a lui $\mathbb{R}[X]_1$.

4*. Fie V spațiul vectorial al funcțiilor reale, generat de baza:

$$B = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\}.$$

Fie aplicația $\varphi : V \to V$, definită prin:

$$(\varphi(f))(x) = 4 \int_0^{2\pi} \sin^3(x + y) f(y) dy.$$

(a) Arătați că φ este aplicație liniară;

(b) Determinați $\mathrm{Ker}\varphi$ și $\mathrm{Im}\varphi$;

(c) Determinați matricea lui φ în baza B.

5*. Fie aplicația urmă $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definită prin $\mathrm{tr}(A) = \sum a_{ii}$, unde $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Arătați că $\mathrm{def}(\mathrm{tr}) = n^2 - 1$, unde $\mathrm{def}(\mathrm{tr}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$, se numește *defectul* aplicației tr.

4 Exerciții suplimentare

6. Fie vectorii $v_1 = (x, 3x, 2), v_2 = (5, -1, x + 4), v_3 = (0, -x, x)$.

(a) Determinați x astfel încît mulțimea $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ să formeze o bază pentru spațiul $\mathbb{R}^3$.

(b) Găsiți matricea de trecere de la baza B' la baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

7. Fie aplicația:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (3x - 5y, 2x + z, 5x - 5y + z).$$

(a) Arătați că f este aplicație liniară;

(b) Determinați matricea lui f în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ și baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$;

(c) Determinați $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$;

(d) Verificați teorema rang-defect și găsiți baze în $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$;

(e) Fie mulțimile $B_1 = \{(-1,0,1),(2,2,0),(1,0,0)\}$ și $B_2 = \{(3,1),(-2,2)\}$. Arătați că B_1 este bază în $\mathbb{R}^3$ și B_2 este bază în $\mathbb{R}^2$;

(f) Găsiți matricele de trecere de la bazele canonice la bazele B_1, respectiv B_2;

(g) Găsiți matricea aplicației f în raport cu bazele B_1, respectiv B_2.

8. Fie spațiul $V = \mathbb{R}^3$ și mulțimile:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 5y - z = 0\};$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4z - y \text{ și } z = 2x - y\}.$$

(a) Arătați că $S_1 \hookrightarrow V$ și $S_2 \hookrightarrow V$;

(b) Verificați teorema lui Grassmann pentru S_1 și S_2, adică:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$