Seminar 3
Exerciții spații vectoriale

1. Fie $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a+b & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
Arătați că S este subspațiu vectorial al lui $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

2. Decideți care din următoarele sisteme de vectori sînt liniar independente:

(a) $S_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ în $M_2(\mathbb{R})$;

(b) $S_2 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ în $\mathbb{R}^4$;

(c) $S_3 = \{v_1 = -X^2 + X + 1, v_2 = X^2 - X + 1, v_3 = X^2 + X - 1\}$ în $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$.

3. Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
Aflați $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încît sistemul să fie liniar independent peste $\mathbb{R}$.

4. Fie $S = \{v_1 = X^3 + X + 2, v_2 = 2X^3 - X^2 + 1, v_3 = 2x^2 + 3\}$.

(a) Arătați că S este sistem liniar independent în $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$;

(b) Precizați care dintre polinoamele $P = 4X + 3$ și $Q = X + 1$ aparține spațiului $Sp(S)$;

(c) Este S sistem de generatori pentru $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$?

5. Fie $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a+b & a \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Arătați că V este subspațiu vectorial al lui $M_3(\mathbb{R})$.

(b) Determinați dimensiunea lui V și precizați o bază a acestui spațiu.

6. Fie aplicația:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 - x_3).$$

(a) Arătați că f este aplicație liniară;

(b) Determinați Ker f și Im f;

(c) Determinați dim Ker f și dim Im f, precizînd și cîte o bază în aceste subspații.