Seminar 2
Spații vectoriale

1 Definiții

Noțiunea de spațiu vectorial este una foarte importantă în algebră, dar totodată ea face legătura și cu geometria, oferind cadrul structural în care se poate studia geometria analitică.

În cele ce urmează, dacă nu se specifică altfel, V o mulțime nevidă (pe care o vom înzestra cu structura de spațiu vectorial), iar $\Bbbk$ va fi corpul de bază (al scalarilor), în practică luat cel mai adesea $\Bbbk = \mathbb{R}$ sau $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Definiţie 1.1: O aplicație $\varphi : V \times V \to V$, definită prin $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) \in V$ se numește *lege de compoziție internă* sau *operație algebrică* pe V.

O aplicație $f : \Bbbk \times V \to V$, definită prin $(\alpha, x) \mapsto f(\alpha, x) \in V$ se numește *lege de compoziție externă* pe V.

Cu acestea, avem definiția fundamentală:

Definiţie 1.2: O mulțime nevidă V, înzestrată cu două legi de compoziție, una internă $+ : V \times V \to V$ și alta externă $\cdot : \Bbbk \times V \to V$ se numește *spațiu vectorial peste* $\Bbbk$ sau $\Bbbk$-spațiu vectorial, notat pe scurt ${}_{\Bbbk}V$ dacă sînt îndeplinite axiomele:

(1) $(V, +)$ este grup abelian, adică:

- (a) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V$;
- (b) $\exists 0_V \in V$ a.î. $x + 0_V = 0_V + x = x, \forall x \in V$;
- (c) $\forall x \in V, \exists(-x) \in V$ a.î. $x + (-x) = (-x) + x = 0_V$;
- (d) $x + y = y + x, \forall x, y \in V$

(2) Au loc:

- (a) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \forall \alpha \in \Bbbk, \forall x, y \in V$;
- (b) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \forall \alpha, \beta \in \Bbbk, \forall x \in V$;
- (c) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x, \forall \alpha, \beta \in \Bbbk, \forall x \in V$;
- (d) $1_{\Bbbk} \cdot x = x, \forall x \in V$.

În acest context, elementele corpului $\Bbbk$ se numesc *scalari*, iar elementele din V se numesc *vectori*. Legea de compoziție externă se numește *înmulțirea vectorilor cu scalari*. Dacă $\Bbbk = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, spațiul vectorial V se numește real sau, respectiv, complex.

Uneori, în loc de „spațiu vectorial“ se mai poate spune „*spațiu liniar*“ sau, pe scurt, dacă nu există riscul de confuzie, vom spune simplu „spațiu“.

În general, pentru a nu complica notația, nu vom face distincție în scris între operațiile din corpul $\Bbbk$, cele din V și legea externă. Însă trebuie avută atenție, conform definiției, să utilizăm operațiile corespunzătoare.

Observaţie 1.1: În situații diverse, spațiile vectoriale pot fi definite peste corpuri *necomutative* $\Bbbk$, caz în care înmulțirea dintre un vector și un scalar să fie permisă doar în una dintre părți sau, dacă este permisă în ambele, rezultatele să nu coincidă. Pentru acele situații există noțiunea de *spațiu vectorial stîng*, respectiv *drept*, notate ${}_{\Bbbk}V$ și $V_{\Bbbk}$.

Deoarece în această lucrare vom avea nevoie doar de cazul comutativ, nu vom mai face precizarea de fiecare dată, dar vom lucra cu un corp comutativ de scalari, ceea ce face ca spațiul vectorial să fie bilateral.

Propoziţie 1.1: *Fie* V *un* $\mathbb{k}$*-spațiu vectorial. Au loc următoarele proprietăți:*

(a) $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \forall x \in V$;

(b) $\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y, \forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall x, y \in V$;

(c) $0_{\mathbb{k}} \cdot x = 0_V, \forall x \in V$;

(d) $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -\alpha \cdot x, \forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall x \in V$;

(e) Dacă $\alpha \cdot x = 0_V$*, atunci* $\alpha = 0_{\mathbb{k}}$ *sau* $x = 0_V$.

Demonstrația propoziției este simplă și lăsată ca exercițiu, folosind axiomele din definiție.

Primele exemple simple, dar foarte importante (prototipice, după cum vom vedea) sînt următoarele:

Exemplu 1.1: (1) $\mathbb{k}$ este un spațiu vectorial peste el însuși, cu operațiile de corp, legea externă confundîndu-se cu cea internă.

(2) Mulțimea $\mathbb{k}^n = \mathbb{k} \times \mathbb{k} \times \cdots \times \mathbb{k} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{k}\}$, unde $\mathbb{k}$ este un corp comutativ, este un spațiu vectorial peste $\mathbb{k}$, numit *spațiul aritmetic*, în raport cu legile de compoziție pe componente, pentru $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{k}^n$:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n &\to \mathbb{k}^n, x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n); \\ \cdot : \mathbb{k} \times \mathbb{k}^n &\to \mathbb{k}^n, \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

(3) Mulțimea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{k})$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{k}$, operația internă fiind adunarea obișnuită a matricelor, iar operația de înmulțire cu scalari fiind cea corespunzătoare, prin care se înmulțesc toate elementele matricei cu scalarul respectiv.

(4) Fie mulțimea $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n} = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid grad(p) \leqslant n\}$. Această mulțime este un spațiu vectorial real, cu operațiile de adunare a polinoamelor și înmulțire cu scalari.

(5) Mulțimea soluțiilor unui sistem liniar și omogen formează un spațiu vectorial peste corpul coeficienților acestui sistem, $\mathbb{k}$. Soluțiile unui sistem cu m ecuații și n necunoscute pot fi privite ca elemente din $\mathbb{k}^n$, care se adună și înmulțesc cu scalari respectînd operațiile din spațiul aritmetic de mai sus. Datorită transformărilor elementare care produc matrice echivalente, rezultatul va fi alcătuit tot din soluții ale sistemului.

Ca în toate cazurile cînd introducem o nouă structură, este de folos să studiem *substructuri* ale acesteia.

Așadar, fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $W \subseteq V$ o submulțime nevidă.

Definiţie 1.3: W se numește *subspațiu vectorial* al lui V dacă operațiile algebrice pe V induc pe W o structură de spațiu vectorial peste $\mathbb{k}$.

Vom nota $W \leqslant_{\mathbb{k}} V$.

Observaţie 1.2: Condiția ca $0_V \in W$ este una necesară pentru structura de subspațiu, datorită structurii subiacente de subgrup aditiv.

Așa cum în cazul subgrupurilor, verificarea substructurii se face printr-un rezultat ajutător mai degrabă decît prin definiție, și în cazul spațiilor vectoriale avem:

Propoziţie 1.2: *Dacă* W *este o submulțime nevidă a* $\mathbb{k}$*-spațiului vectorial* V*, atunci următoarele afirmații sînt echivalente:*

(1) $W \leqslant_{\mathbb{k}} V$;

(2) $\forall x, y \in W, \forall \alpha \in \mathbb{k}$, *avem* $x + y \in W$ *și* $\alpha \cdot x \in W$;

(3) $\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$, *avem* $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W$.

Propoziția poate fi pusă sub forma:

$$W \leqslant_{\mathbb{k}} V \iff \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in W, \forall x, y \in W, \alpha, \beta \in \mathbb{k}.$$

Să luăm cîteva exemple corespunzătoare spațiilor introduse mai sus:

Exemplu 1.2: (1) Mulțimea $\{0_V\}$ este un subspațiu vectorial al lui V, numit *subspațiul nul*. De asemenea, $V \leqslant_{\mathbb{k}} V$, iar aceste două exemple se numesc *subspații improprii*, celelalte fiind *proprii*.

(2) Mulțimea $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$ definită mai sus este un subspațiu vectorial al spațiului polinoamelor cu coeficienți reali.

(3) Submulțimea $W = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1 - 5x_2 = 0\}$ este un subspațiu vectorial al spațiului aritmetic $\mathbb{R}^2$. Ea poate fi asimilată cu spațiul soluțiilor unui sistem liniar și omogen cu o ecuație și două necunoscute.

(4) În spațiul aritmetic $\mathbb{R}^3$, dreptele și planele care conțin originea sînt subspații vectoriale.

În continuare, vom vedea cum putem obține subspații noi din unele deja existente, prin diverse operații permise.

Definiţie 1.4: Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și V_1, V_2 două subspații ale sale. Mulțimea:

$$V_1 + V_2 = \{x \in V \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$$

se numește *suma subspațiilor* V_1 și V_2.

Propoziţie 1.3: *Fie* V *un* $\mathbb{k}$*-spațiu vectorial și* V_1, V_2 *două subspații ale sale. Atunci:*

(a) $V_1 \cap V_2 \leqslant_{\mathbb{k}} V$;

(b) $V_1 + V_2 \leqslant_{\mathbb{k}} V$.

Trebuie remarcat că, în general, reuniunea a două subspații *nu* este un subspațiu vectorial.
Pentru a pregăti o nouă operații pe baza sumei, avem nevoie de următoarea:

Propoziţie 1.4: *Fie* V_1, V_2 *două subspații vectoriale ale* $\mathbb{k}$*-spațiului* V*. Orice vector din* V *se scrie în mod unic ca suma dintre un vector din* V_1 *și unul din* V_2 *dacă și numai dacă* $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Pe baza acesteia, introducem:

Definiţie 1.5: Fie $V_1, V_2 \leqslant_{\mathbb{k}} V$, cu $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$. Suma $V_1 + V_2$ se numește *suma directă* și se notează $V_1 \oplus V_2$. În acest caz, subspațiile V_1 și V_2 se numesc *suplementare*

Un exemplu care ne arată utilizarea spațiilor vectoriale pornind de la o problemă „normală“ este următorul. Orice funcție $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ este suma dintre o funcție pară și una impară:

$$f(x) = \frac{1}{2}\big[f(x) + f(-x)\big] + \frac{1}{2}\big[f(x) - f(-x)\big], \forall x \in (-a, a).$$

Mai mult, singura funcție care este simultan pară și impară este funcția nulă. Rezultă de aici că subspațiul funcțiilor pare și subspațiul funcțiilor impare sînt suplementare. În prealabil, ar trebui notat că mulțimea $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ de funcții reale formează un spațiu vectorial real, operațiile fiind cele punctuale:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \forall \alpha, x \in \mathbb{R}.$$

Definiţie 1.6: Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial și $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ o submulțime nevidă a lui V: Un vector de forma:

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n, \alpha_i \in \Bbbk, x_i \in S, \forall i$$

se numește *combinație liniară* finită de elemente din S. Se notează, folosind terminologia engleză, $\mathrm{Span}(S)$ sau, în unele cazuri, $\langle S \rangle_{\Bbbk}$.

Din definiție, se vede imediat că are loc:

Propoziţie 1.5: *Cu notațiile și contextul de mai sus,* $\mathrm{Span}(S)$ *este subspațiu vectorial al lui* V. *El se mai numește* subspațiul generat de S *sau* acoperirea liniară *a lui* S.

Se pot demonstra și observa cu ușurință următoarele:

Observaţie 1.3: (1) $S = \emptyset \implies \mathrm{Span}(S) = \{0_V\}$;

(2) $V_1 + V_2 = \mathrm{Span}(V_1 \cup V_2)$;

(3) $\mathrm{Span}(S)$ este intersecția tuturor subspațiilor lui V ce conțin pe S;

(4) Diferite submulțimi de vectori din V pot avea aceeași acoperire liniară.

Ne pregătim pentru introducerea unei noțiuni fundamentale pentru spații vectoriale, anume aceea de *bază*. Dar mai întîi, avem nevoie de alte preliminarii.

Definiţie 1.7: Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, sistemul de vectori S se numește *liniar independent* sau *liber* dacă din egalitatea $\sum_i \alpha_i x_i = 0_V$, cu $\alpha_i \in \Bbbk$ rezultă cu necesitate că toți $\alpha_i = 0$.

Sistemul se numește *liniar dependent* sau *legat* dacă există α_i, nu toți nuli, astfel încît $\sum_i \alpha_i x_i = 0_V$.

Cu acestea, avem:

Propoziţie 1.6: *Fie* $\Bbbk$*-spațiul vectorial* V *și submulțimea* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$.

(a) Dacă $0_V \in S$, *atunci* S *este liniar dependent;*

(b) Dacă S *este liniar independent, atunci* $x_i \neq 0_V, \forall i$;

(c) Dacă S *este liniar dependent, atunci pentru orice* $S' \subseteq V, S \subseteq S'$, *rezultă că* S' *este liniar dependent;*

(d) Dacă S *este liniar independent, atunci pentru orice* $S'' \subseteq S$, *rezultă că* S'' *este liniar independent.*

Demonstraţie. (a) Fie $x_n = 0_V \in S$. Deoarece are loc egalitatea:

$$0 \cdot x_1 + 0 \ \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n = 0_V,$$

care nu are toți coeficienții nuli, rezultă că S este liniar dependent.

(b) Dacă $x_i = 0_V \in S$, atunci, conform punctului anterior, S este liniar dependent, care este o contradicție.

(c) Deoarece S este liniar dependent, rezultă că există o combinație liniară nulă, care nu are toți coeficienții nuli. Atunci putem mări oricît această combinație liniară, adăugînd scalari nuli pentru toți ceilalți vectori și rezultă că, oricum am mări pe S, obținem un sistem liniar dependent.

(d) Dacă S'' ar fi liniar dependent, atunci și S ar trebui să fie liniar dependent, din subpunctul anterior, contradicție. □

Definiţie 1.8: Numărul maxim de vectori liniar independenți dintr-o mulțime $S \subseteq V$ se numește *dimensiunea* sau *rangul* mulțimii S.

Păstrînd notațiile și contextul, avem:

Definiţie 1.9: Mulțimea S se numește *sistem de generatori* pentru V dacă orice vector $x \in V$ se exprimă ca o combinație liniară de vectori din S. În acest caz, spațiul vectorial V se numește *finit generat*, deoarece S conține un număr finit de elemente.

De exemplu, folosind și intuiția geometrică, avem că mulțimea $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ este un sistem de generatori pentru planul $\mathbb{R}^2$.

Operațiile permise asupra unui sistem de generatori, care să-l facă să rămînă sistem de generatori sînt prezentate în rezultatul următor.

Propoziţie 1.7: *Fie $\Bbbk$-spațiul vectorial V și $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ un sistem de generatori. Următoarele operații transformă sistemul S într-un nou sistem S', care rămîne sistem de generatori pentru V:*

(a) schimbarea ordinii vectorilor din S;

(b) înmulțirea unui vector din S cu un scalar nenul;

(c) adăugarea la un vector din S a unui alt vector din S, înmulțit, eventual, cu un scalar nenul.

Demonstrația este evidentă și se bazează pe „stabilitatea" spațiilor vectoriale la combinații liniare.

Teoremă 1.1 (Teorema schimbului)**:** *Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial, $S = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ un sistem liniar independent din V și $S' = \{v_1, \dots, v_m\}$ un sistem de generatori pentru V. Atunci $s \leqslant m$ și, după o eventuală reindexare a vectorilor din S', sistemul:*

$$S'' = \{u_1, u_2, \dots, u_s, v_{s+1}, \dots, v_m\}$$

este tot un sistem de generatori pentru V.

Demonstrația se poate face simplu prin inducție după s.

Din această teoremă rezultă că, într-un spațiu vectorial finit generat, orice sistem de vectori liniar independenți are mai puține elemente decît orice sistem de generatori. În plus, în orice sistem de generatori, se pot înlocui vectorii cu alții, liniar independenți, fără ca proprietatea de a fi sistem de generatori a sistemului să fie afectată.

2 Bază și dimensiune

Ajungem, în sfîrșit, la elementul fundamental din studiul spațiilor vectoriale, anume noțiunea de *bază*, care ne va permite să extragem toate informațiile relevante în studiul spațiilor vectoriale.

Definiţie 2.1: Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial. Un sistem de vectori $\mathcal{B} \subseteq V$ se numește *bază* în V dacă $\mathcal{B}$ este simultan un sistem liniar independent și sistem de generatori pentru V.

De exemplu, în spațiul aritmetic $\Bbbk^n$, mulțimea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, unde e_i este un șir de n zerouri, cu elementul 1 pe poziția i este o bază, denumită *baza canonică*.

În spațiul real al polinoamelor cu coeficienți reali și de grad cel mult n, notat $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n}$, mulțimea $B = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ este o bază.

În spațiul vectorial al matricelor de tip (m, n) cu elemente din $\Bbbk$, o bază este dată de matricele $E_{ij} = (e_{ij})$, care au 1 la intersecția linei i cu coloana j și zero în rest.

Definiţie 2.2: Un spațiu vectorial V se numește *finit dimensional* dacă admite o bază finită. În caz contrar, el se numește *infinit dimensional*.

Un rezultat foarte important este următorul:

Propoziţie 2.1: *Orice două baze dintr-un $\Bbbk$-spațiu vectorial finit dimensional au același număr de elemente.*

Demonstrația rezultă imediat din teorema schimbului, aplicată pentru două din bazele spațiului.

Datorită acestui rezultat, avem:

Definiţie 2.3: Numărul comun de elemente ale tuturor bazelor unui spațiu vectorial V se numește *dimensiune* a spațiului, notată $\dim_{\Bbbk} V$.

Din exemplele de mai sus, rezultă că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]_{\leqslant n} = n + 1$ și $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{m,n}(\Bbbk) = m \cdot n$.

De asemenea, din proprietățile și noțiunile de pînă acum, avem imediat:

Propoziţie 2.2: *Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial finit dimensional și $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ o submulțime a sa. Atunci B este o bază în V dacă și numai dacă orice vector din V are o exprimare unică sub forma unei combinații liniare de vectori din B.*

Demonstraţie. Dacă B este bază, atunci B este sistem de generatori pentru V. Rezultă că orice vector din V poate fi scris ca o combinație liniară de elemente din B. Unicitatea reprezentării se obține astfel: fie $x = \sum_i \alpha_i x_i = \sum \beta_i x_i$ două scrieri diferite pentru x. Atunci $\sum(\alpha_i - \beta_i) \cdot x_i = 0$ și, deoarece B este și sistem liniar independent, avem $\alpha_i = \beta_i$, pentru orice i.

Reciproc, din ipoteză, avem că B este sistem de generatori pentru V. Pentru a arăta independența liniară, considerăm o combinație liniară nulă. Dar și vectorul nul poate fi scris ca o combinație liniară a vectorilor din B, cu scalari nuli. Din unicitatea reprezentării vectorului 0_V, rezultă că toți scalarii din prima combinație sînt egali cu cei dintr-a doua, adică nuli. □

Definiţie 2.4: Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial și B o bază a sa. Fie $x \in V$, scris în baza B sub forma $x = \sum_i \alpha_i x_i$. Scalarii (unici) $\alpha_i \in \Bbbk$ se numesc *coordonatele* vectorului x în baza B. Funcția bijectivă $f : V \to \Bbbk^n$, care asociază unui vector coordonatele sale într-o bază se numește *sistem de coordonate*.

Următorul rezultat ne poate ajuta să găsim o bază într-un spațiu vectorial finit dimensional.

Propoziţie 2.3: *Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial de dimensiune n. Atunci:*

(a) Orice sistem liniar independent are cel mult n vectori;

(b) Orice sistem liniar independent care are exact n vectori este bază;

(c) Orice sistem de generatori are cel puțin n vectori;

(d) Orice sistem de generatori care are exact n vectori este bază.

De asemenea, avem și:

Teoremă 2.1: *Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial de dimensiune n și $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, cu $k \leqslant n$ o submulțime a sa, liniar independentă. Atunci există vectorii $\{x_{k+1}, \dots, x_{k+p}\}$ astfel încît mulțimea $\{x_1, \dots, x_{k+p}\}$ să formeze o bază, cu $k + p = n$.*

Din aceste ultime două rezultate, obținem:

Observaţie 2.1: (a) Din orice sistem liniar independent se poate extrage o bază.

(b) Orice sistem de generatori poate fi completat la o bază.

Date două subspații ale unui spațiu vectorial, ele contribuie la dimensiunea spațiului așa cum arată următorul rezultat.

Teoremă 2.2 (H. Grassmann)**:** *Dacă V_1 și V_2 sînt două subspații vectoriale ale $\Bbbk$-spațiului vectorial finit dimensional V, atunci:*

$$\dim_{\Bbbk} V_1 + \dim_{\Bbbk} V_2 = \dim_{\Bbbk}(V_1 + V_2) + \dim_{\Bbbk}(V_1 \cap V_2).$$

3 Matricea unei aplicații liniare

Strînsa legătură între aplicații liniare și matrice, care justifică și importanța studiului aprofundat al exemplului dat de spațiul vectorial $M_n(\mathbb{R})$ constă în faptul că oricărei aplicații liniare i se poate asocia o matrice, într-o bază a spațiului vectorial. Aceasta se definește și se calculează foarte simplu:

Definiţie 3.1: Fie V, W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale și fie $B_1 = \{e_i\}_{i \in I}$ o bază a lui V, iar $B_2 = \{f_j\}_{j \in J}$ o bază a lui W.

Fie $f : V \to W$ o aplicație liniară. Atunci, pentru orice vector $v \in V$, $f(v) \in W$, deci se poate scrie în baza B_2. În particular, pentru $v \in B_1$, obținem:

$$f(e_i) = \sum_j \alpha_{ij} f_j.$$

Matricea $A = (\alpha_{ij})_{i,j}$ se numește *matricea aplicației* f *în baza* B_2.

De exemplu: fie $V = \mathbb{R}^3$ și $W = \mathbb{R}^2$. Luăm bazele canonice:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ B_2 &= \{(1,0),(0,1)\}. \end{aligned}$$

Definim o aplicație liniară:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_2 + 3x_3).$$

Pentru a calcula matricea lui f în baza B_2, avem:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,2) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (0,3) = 0 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2. \end{aligned}$$

Matricea se obține acum din scalarii care sînt coeficienți în expresia de mai sus:

$$A = M_{B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observaţie 3.1: În unele cazuri, se lucrează cu A^t, deci coeficienții sînt puși *pe coloane* în matricea aplicației liniare. Urmăriți convenția de la curs, pe care o vom folosi.

Cu această legătură, multe din proprietățile morfismelor de spații vectoriale pot fi transferate studiului matriceal. În particular, calculul valorii aplicației liniare într-un vector oarecare coincide cu înmulțirea matricei aplicației liniare cu vectorul linie (sau coloană) respectiv. Avem și:

Exercițiu: Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice nenulă, dar cu $\det(A) = 0$. Să se arate că există o matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$, nenulă, dar cu $AB = 0_n$.

Soluție: Reformulăm problema în context de spații vectoriale. Așadar, lucrăm în spațiul vectorial $\mathbb{R}^{n^2}$, iar matricea A este gîndită ca matrice a unei aplicații liniare $f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$.

Proprietate importantă: Deoarece $\det(A) = 0$, deci A nu este inversabilă, rezultă că morfismul f nu este injectiv. Demonstrăm prin reducere la absurd. Fie $x \in \mathbb{R}^{n^2}$. Atunci a calcula $f(x)$ este echivalent cu a înmulți matricea A cu vectorul coloană x. Presupunem că avem $f(x) = f(y)$, pentru doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^{n^2}$. Matriceal, avem $AX = AY$. Dar, deoarece A nu este inversabilă, nu o putem reduce pentru a concluziona că $X = Y$. Așadar, f nu este injectivă.

Dar, dacă f nu este injectivă, înseamnă că $\mathrm{Ker}(f)$ nu conține doar vectorul nul. În particular, rezultă că există un vector nenul $b \in \mathrm{Ker}(f)$, cu $f(b) = 0_{\mathbb{R}^{n^2}}$. Trecînd la matrice, vectorul b corespunde unei matrice nenule B, astfel încît $f(B) = AB = 0_n$.

Am demonstrat, astfel, parțial exercițiul. Pentru a finaliza demonstrația, arătați și:

Exercițiu: Orice morfism injectiv este inversabil la dreapta. Adică, dacă $f : A \to B$ este un morfism injectiv (de grupuri, spații vectoriale, sau chiar funcție), există $g : B \to A$, astfel încît $f \circ g = \mathrm{Id}$, morfismul identitate.

Deduceți, în exercițiul anterior, că putem găsi chiar $B \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea din enunț. (Indicație: considerați g o posibilă inversă la dreapta a lui f, fie B matricea lui g în baza canonică și deduceți că $(f \circ g)(v) = ABV$.)

4 Matricea de trecere (schimbare de bază)

Date mai multe baze ale unui spațiu vectorial, sîntem interesați de schimbarea de coordonate ale vectorilor. Fie, pentru aceasta, un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial V de dimensiune n și $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}, B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ baze în V.

Orice vector din B_2 se poate exprima unic în funcție de vectorii bazei B_1, deci $v_i = \sum_j c_{ji} u_j$. Acest sistem definește o matrice pătratică de ordin n, $M = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, transpusa coeficienților.

Fie $\overline{B}_1$ și $\overline{B}_2$ matricele-coloană cu elemente din cele două baze. Atunci, folosind ecuația de mai sus, relația de legătură dintre vectorii celor două baze poate fi scrisă matriceal:

$$\overline{B}_2 = M^T \cdot \overline{B}_1.$$

Definiţie 4.1: Matricea M, astfel determinată, se numește *matricea de trecere* de la baza B_1 la baza B_2.

Pentru schimbarea coordonatelor, avem:

Teoremă 4.1 (Schimbarea coordonatelor)**:** *Dacă M este matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2, iar X_1, respectiv X_2 sînt vectorii coloană ai coordonatelor unui vector $x \in V$ în bazele B_1, respectiv B_2, atunci:*

$$X_2 = M^{-1} \cdot X_1.$$

În particular, rezultă că matricea de trecere M este inversabilă.

Definiţie 4.2: Fie $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Se numește *rangul* lui T, notat $\mathrm{rang}(T)$, dimensiunea subspațiului $\mathrm{Im}(T)$.

Se numește *defectul* lui T, notat $\mathrm{def}(T)$, dimensiunea subspațiului $\mathrm{Ker}(T)$.

Teoremă 4.2 (Teorema rang-defect)**:** *Fie V și W două spații vectoriale peste același corp comutativ $\mathbb{k}$, cu $\dim_{\mathbb{k}} V = n$ și fie $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci:*

$$\mathrm{rang}(T) + \mathrm{def}(T) = n.$$

5 Exerciții

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Să se stabilească dacă legile de compoziție:

$$\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \oplus y = x + y - a$$
$$\otimes : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha \otimes x = \alpha x + (1 - \alpha) a$$

determină o structură de spațiu vectorial real pe mulțimea $\mathbb{R}$.

2. Să se arate că mulțimea $(0, \infty)$ este un spațiu vectorial real în raport cu legile de compoziție:

$$\oplus : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty) x \oplus y = xy$$
$$\odot : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to (0, \infty), \alpha \odot x = x^\alpha.$$

3. Să se arate că mulțimea

$$S = \{(\alpha - 2\beta; \alpha + 3\beta; \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial real $\mathbb{R}^3$. Determinați o bază în S, precum și $\dim_{\mathbb{R}} S$.

4. Se consideră mulțimea:

$$L = \left\{ A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & u & z \end{pmatrix}, x, y, z, u \in \mathbb{R}, x = y + z \right\}$$

(a) Să se arate că L este un subspațiu vectorial al lui $M_{2,3}(\mathbb{R})$;

(b) Determinați o bază în L, precum și $\dim_{\mathbb{R}} L$.

5. Se consideră sistemul omogen:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

Să se rezolve sistemul. Să se arate că mulțimea soluțiilor sistemului este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^4$. Determinați o bază în subspațiul soluțiilor.

6. Să se arate că sistemul de vectori $\{v_1, \dots, v_4\}$ din $\mathbb{R}^3$ este liniar dependent, unde:

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1), v_4 = (1, 1, 1).$$

7. Să se stabilească dacă vectorul $v = (4, -2, 0, 3)$ din spațiul vectorial real $\mathbb{R}^4$ este o combinație liniară a vectorilor $v_1 = (3, 9, -4, -2)$, $v_2 = (2, 3, 0, -1)$, $v_3 = (2, -1, 2, 1)$.

8. În $\mathbb{R}[X]_{\leqslant 2}$, spațiul polinoamelor reale de grad cel mult 2, să se găsească coordonatele polinomului $p(x) = 3x^2 - x + 4$ în raport cu baza B formată din $p_1(x) = x^2 - 1$, $p_2(x) = 2x + 1$, $p_3(x) = x^2 + 3$.

9. În spațiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideră baza canonică:

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

și o altă bază:

$$B' = \{(1, 2, 1), (1, -1, 0), (3, 1, -2)\}.$$

Să se determine matricea de trecere de la baza B la baza B', precum și coordonatele vectorului $v = (2, 3, -5)$ în baza B'.

10. Fie V, W două spații vectoriale și $f : V \to W$ o aplicație liniară.A Arătați că $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\}$ este un subspațiu al lui V, iar $\mathrm{Im}(f) = \{y \in W \mid \exists x \in V \text{ a.î. } f(x) = y\}$ este subspațiu al lui W.

11. Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale. Dați exemplu de astfel de spații și de o aplicație $f : V \to W$ care să fie morfism între grupurile aditive $(V, +)$ și $(W, +)$, dar să nu fie $\mathbb{k}$-liniară.

12. În spațiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii:

$$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 1), v_3 = (\alpha + 3, \alpha + 1, \alpha + 2), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Să se determine α, știind că vectorii sînt liniar dependenți.

13. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3, 2x_1 + x_2)$.

(a) Arătați că f este morfism de spații vectoriale;

(b) Determinați $\mathrm{Ker}(f)$;

(c) Determinați matricea aplicației liniare în baza canonică.

(d) Verificați teorema rang-defect.

14. Fie $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + x_4)$.

(a) Arătați că f este morfism de spații vectoriale.

(b) Determinați matricea aplicației f în baza canonică.

(c) Determinați $\mathrm{Ker}(f)$ și $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Verificați teorema rang-defect.

15. Dați exemplu de un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial V și o submulțimea $W \subseteq V$ care să fie subgrup al lui $(V, +)$, dar să nu fie subspațiu vectorial al lui V.

16. Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o mulțime de vectori din V. Fie $f : V \to W$ o aplicație liniară. Notăm cu $f(S)$ imaginea mulțimii S prin morfismul f, deci $f(S) = \{f(v_i)\}$. Arătați că:

(a) Dacă S este liniar dependentă în V, atunci $f(S)$ este liniar dependentă în W;

(b) Dacă S este liniar independentă în V și f este injectivă, atunci $f(S)$ este liniar independentă în W;

(c) Dacă S este sistem de generatori în V și f este surjectiv, atunci $f(S)$ este sistem de generatori în W;

(d) Dacă S este bază în V și f este bijectiv, atunci $f(S)$ este bază în W. Deduceți de aici că orice două spații vectoriale izomorfe au aceeași dimensiune.