Seminar 1
Calcul matriceal

1 Structuri algebrice

Amintim mai întîi definițiile principale în ce privește structurile algebrice.
Începem chiar cu noțiuni preliminare, anume relațiile binare și operațiile.

Definiţie 1.1: Fie A o mulțime nevidă. O submulțime a produsului cartezian $A \times A$ se numește *relație binară definită pe* A.

Dacă $R \subseteq A \times A$ este o asemenea relație, în locul notației $a, b \in R$, pentru două elemente din A, aflate în relația R, vom folosi notația aRb și vom citi „a este în relația R cu b“.

De exemplu, relația de rudenie este o relație binară, definită pe mulțimea oamenilor, relația de ordine este o relație binară definită pe mulțimea numerelor naturale, de pildă, relația de paralelism este o relație binară definită pe mulțimea curbelor din plan și altele.

Relațiile binare pot avea una sau mai multe din următoarele proprietăți:
Vom păstra notațiile și contextul de mai sus. Relația R se numește:

- *reflexivă*, dacă orice element este în relația R cu sine, i.e. $aRa, \forall a \in A$;
- *simetrică*, dacă oricînd aRb implică bRa, pentru niște $a, b \in A$;
- *antisimetrică*, dacă din aRb și bRa, pentru niște $a, b \in A$, rezultă că a și b coincid.
- *tranzitivă*, dacă din aRb și bRc putem deduce aRc, pentru orice $a, b, c \in A$ care satisfac ipoteza.

În funcție de proprietățile respectate, relațiile se pot clasifica. De exemplu, cel mai des se întîlnește relația de *ordine*, care este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă, precum și relația de *echivalență*, care este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemple clasice: relația „$\leqslant$“ este o relație de ordine pe mulțimea $\mathbb{R}$. Egalitatea este o relație de echivalență, definită pe aproape orice mulțime de obiecte matematice de același tip (mulțimi de numere, de matrice, de funcții ș.a.m.d.).

Dacă relațiile binare nu returnează un al treilea element, deci nu dau o dependență funcțională, ele avînd doar o valoare de adevăr (i.e. putem spune doar dacă aRb este adevărat, nu și „cît face“ aRb), *operațiile* sau *legile de compoziție* au această proprietate.

Mai precis:

Definiţie 1.2: Fie A o mulțime nevidă. Se numește *lege de compoziție* sau *operație (binară)* orice funcție de tipul $f : A \times A \to A$.

Exemplele tipice sînt operațiile algebrice, pe mulțimi de numere. Însă înainte de a le folosi, mai avem nevoie de terminologie.

Păstrînd notațiile și contextul de mai sus, o lege de compoziție f se numește:

- *internă*, dacă $\forall a, b \in A, f(a, b) \in A$ (automat verificată, dacă în definiție impunem condiția ca f să fie *funcție* și nu doar o asociere abstractă);
- *asociativă*, dacă $\forall a, b, c \in A, f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)$;
- *comutativă*, dacă $\forall a, b \in A$, are loc $f(a, b) = f(b, a)$;

- *cu element neutru*, dacă există un element distins (unic) $e \in A$, astfel încît $f(a, e) = f(e, a) = a, \forall a \in A$;
- *cu elemente inversabile (simetrizabile)* dacă pentru un $a \in A$ există $a^{-1} \in A$ astfel încît $f(a, a^{-1}) = f(a^{-1}, a) = e$, elementul neutru.

Cum spuneam, exemplele tipice sînt operațiile algebrice elementare. Cum ar fi adunarea, definită pe mulțimea numerelor reale, care are toate proprietățile de mai sus. Înmulțirea, definită pe mulțimea numerelor naturale, nu admite decît un singur element inversabil, anume 1.

Compunerea funcțiilor reale, pe de altă parte, nu este comutativă, dar are elemente inversabile (chiar dacă nu toate), anume funcțiile bijective.

Există suficiente exemple de operații care nu au una sau mai multe din proprietățile de mai sus, după cum vă puteți convinge.

Deoarece, ca în cazul relațiilor binare, există o legătură strînsă între operație și mulțimea pe care a fost definită, se definesc *structurile algebrice* ca fiind exact perechi alcătuite din mulțimi și operații definite pe ele, satisfăcînd anumite proprietăți, conform definițiilor de mai jos.

Definiţie 1.3: Fie A o mulțime nevidă și $\circ$ o operație definită pe A.

Perechea $(A, \circ)$ se numește:

- *monoid*, dacă operația este internă, asociativă și admite element neutru;
- *grup*, dacă este monoid și orice element este inversabil.

Dacă, în plus, operația este și comutativă, se adaugă adjectivul „comutativ" pentru structura corespunzătoare (i.e. monoid comutativ, grup comutativ). În onoarea matematicianului norvegian N. H. Abel, grupurile comutative se mai numesc *abeliene*.

Există situații în care ar fi de folos să putem lucra cu mai multe operații pe o mulțime. Gîndiți-vă, de exemplu, la cazul numerelor reale, pe care le putem și aduna, și înmulți, ba chiar putem opera în expresii care să conțină ambele legi, simultan. Pentru aceasta, se pot defini structuri algebrice mai bogate, adăugînd condiții suplimentare de compatibilitate pentru operațiile folosite.

Definiţie 1.4: Fie A o mulțime nevidă și $\circ, *$ două operații, ambele definite pe A.

Tripletul $(A, \circ, *)$ se numește:

- *inel*, dacă perechea $(A, \circ)$ este grup comutativ, perechea $(A, *)$ este monoid, iar operația $*$ este *distributivă* față de $\circ$, adică au loc:

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c) \text{ și } (b \circ c) * a = (b * a) \circ (c * a), \forall a, b, c \in A.$$

- *corp*, dacă este inel și, în plus, perechea $(A, *)$ este chiar grup.

Ca mai sus, dacă și operația $*$ este comutativă, se adaugă atributul „comutativ" numelui structurii (i.e. inel comutativ, corp comutativ).

Exemplele tipice sînt la îndemînă: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ, $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ este inel necomutativ, $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ este inel comutativ și altele.

Făcînd verificările, veți recunoaște în proprietatea de distributivitate procedura obișnuită de *desfacere a parantezelor* într-o expresie algebrică.

Date două structuri algebrice, eventual cu mulțimi subiacente și operații diferite, există o modalitate de a le relaționa, prin intermediul *morfismelor*:

Definiţie 1.5: Fie $(G, \circ)$ și $(H, *)$ două structuri algebrice (monoizi, grupuri).

O funcție $f : G \to H$ se numește *morfism* dacă respectă operațiile, i.e.:

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) * f(g_2), \forall g_1, g_2 \in G.$$

În plus, cerem ca morfismul să fie și *unitar*, adică $f(e_G) = e_H$ (elementele neutre corespund).

Dacă vrem să definim morfismele pentru inele, cerem în plus ca funcțiile să respecte și cea de-a doua operație, iar ambele elemente neutre să corespundă.

Dacă morfismul este chiar o funcție bijectivă, atunci el se numește *izomorfism*, iar structurile, *izomorfe*.

O ultimă noțiune utilă:

Definiţie 1.6: Dată o structură algebrică $(G, \circ)$ și o submulțime a sa, H, spunem că H este *substructură* pentru G (în particular, submonoid, subgrup) dacă $(H, \circ)$ are aceeași structură ca G, i.e. de monoid sau grup.

În cazul structurilor cu două operații, definiția se păstrează, cerînd ca H să aibă aceeași structură cu G, împreună cu *ambele* operații.

2 Calcul matriceal – Recapitulare liceu

- Operații cu matrice;
- Urma, determinantul și proprietăți;
- Transpusa, adjuncta și inversa unei matrice;
- Rangul unei matrice;
- Structura de inel a $M_n(\mathbb{R})$;
- $(*)$ Matrice din $M_n(\mathbb{Z}_q)$.

3 Sisteme de ecuații liniare – Recapitulare liceu

- Forma matriceală a unui sistem de ecuații liniare;
- Criteriile de compatibilitate;
- Rezolvarea sistemelor Cramer;
- Rezolvarea sistemelor nedeterminate.

3.1 Metoda Gauss-Jordan

Această metodă ne permite să aducem orice matrice la o formă foarte simplă, anume forma matricei identitate, operînd numai cu transformări elementare asupra liniilor sau coloanelor acesteia.

Într-o formă mai relaxată, numită de obicei *eliminarea gaussiană*, este suficient să aducem matricea în formă *superior triunghiulară*, adică astfel încît elementele de sub diagonala principală să fie toate nule.

Metoda Gauss-Jordan are 2 principale aplicații (pe lîngă simplificarea matricei, care ar putea să fie utilă în numeroase contexte). Prima aplicație este în aflarea inversei unei matrice, iar cea de-a doua, în rezolvarea sistemelor liniare.

Inversarea matricelor cu metoda Gauss-Jordan se bazează pe următorul algoritm:

- Dată matricea A, pătrată și nesingulară (inversabilă), se alcătuiește matricea $B = (A \mid I_n)$, unde n este dimensiunea matricei. Matricea B va fi o matrice cu n linii și $2n$ coloane, în care trasăm, pentru conveniență, linia verticală care separă cele două componente;
- În partea stîngă a matricei B (corespunzătoare matricei A), operăm cu *transformări elementare* ale liniilor și coloanelor, pînă cînd această parte devine I_n, transformările reflectîndu-se și în partea dreaptă a matricei B;
- Atunci cînd în partea stîngă A a devenit I_n, partea dreaptă a devenit A^{-1}.

Iată un exemplu, notînd și transformările:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to (1/2)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -5L_1 + L_3]{L_2 \to 2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to (1/4)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to (3/2)L_2 + L_3]{L_1 \to (-1/2)L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -31/8 & | & -17/8 & 3/8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to (-31/8)L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to (-7/4)L_3 + L_2]{L_1 \to (-5/8)L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ 0 & 1 & 0 & | & -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

Rezultă că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$.

Rezolvarea sistemelor liniare cu ajutorul metodei Gauss-Jordan

Vom proceda similar, însă vom opera pe matricea $M = (A| \ B)$, unde A este matricea asociată sistemului liniar, iar B este matricea termenilor liberi (rezultatelor). Cînd, după procedeul Gauss-Jordan, am obținut $M = (I_n|C)$, atunci C va fi matricea-coloană a soluțiilor.

Iată un exemplu: Considerăm sistemul de mai jos.

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 & = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = m^2, \end{cases}$$

cu $m \in \mathbb{R}$. Îi vom discuta compatibilitatea în funcție de m și, în caz favorabil, îl vom rezolva. Totul va rezulta din metoda Gauss-Jordan.

Considerăm matricea M de mai sus:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & m & 1 & | & m \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - mL_1} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & | & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & m-1 & | & m^2-m. \end{pmatrix}$$

În acest punct, avem o discuție:

(a) Dacă $m = 1$, atunci sistemul se reduce la prima ecuație, deci este compatibil dublu nedeterminat. Rezultă soluția $\{(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(b) Dacă $m \neq 1$, atunci putem continua transformările și ajungem, în fine, la:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+m & | & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -m \\ 0 & 0 & 2 & | & (m+1)^2 \end{pmatrix}$$

Aici discutăm din nou:

(b1) Dacă $m = -2$, sistemul este incompatibil, deoarece ultima ecuație devine $0 = 1$.

(b2) Dacă $m \neq -2$, putem continua transformările și ajungem, în cele din urmă, la:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{m+1}{m_2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{m+2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{(m+1)^2}{m+2}. \end{pmatrix}$$

În acest ultim caz, sistemul este compatibil determinat, soluția fiind dată de ultima coloană:

$$\begin{cases} x_1 &= -\frac{m+1}{2} \\ x_2 &= \frac{1}{m+2} \\ x_3 &= \frac{(m+1)^2}{m+2}. \end{cases}$$

Concluzia generală este:

(a) Dacă $m \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$, sistemul are soluție unică;

(b) Dacă $m = -2$, sistemul este incompatibil;

(c) Dacă $m = -1$, sistemul este compatibil nedeterminat.

4 Descompunerea LU

Descompunerea LU este în strînsă legătură cu metoda Gauss-Jordan. Practic, ea „înregistrează" pașii pe care algoritmul Gauss-Jordan îi face, permițînd ca atunci cînd se lucrează cu o matrice cu proprietăți similare, să nu se repete pașii care ar fi comuni.

Fie, de exemplu, matricea: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}$.

Dacă vrem să aplicăm măcar eliminarea gaussiană, scopul este să obținem o matrice superior triunghiulară. Astfel că ne vom ocupa mai întîi de elementul 2 de pe prima coloană și linia a doua, apoi de elementul nul de dedesubt, iar în final, de elementul 2 de pe linia a treia și coloana a doua.

Vom folosi notațiile standard, i.e. scriem $A = (a_{ij})$ pentru a ne putea referi mai ușor la elementele matricei.

Pentru descompunerea LU, ținem cont de transformările făcute astfel:

- facem transformarea $L_2 \to L_2 - 2L_1$ și avem $a_{21} = 0$. Înregistrăm, în acest scop, numărul 2 pe poziția $2, 1$;
- elementul $a_{31} = 0$ deja, așa că înregistrăm numărul 0 pe poziția $3, 1$, deoarece nu facem nicio transformare;
- facem transformarea $L_3 \to L_3 - (-2)L_2$ și avem $a_{32} = 0$. Înregistrăm numărul -2 pe poziția $3, 2$.

Așadar, matricea se obține:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ (2) & -1 & 6 \\ (0) & (-2) & 2 \end{pmatrix}$$

unde elementele din paranteze sînt, de fapt, zerouri, dar corespund valorilor înregistrate mai sus.

Cu aceasta, alcătuim două matrice: matricea L care va fi inferior triunghiulară ("lower") și va conține elementele din paranteze, iar matricea U, superior triunghiulară ("upper"), va conține restul elementelor din forma Gauss a matricei de mai sus:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cu aceasta, avem proprietatea remarcabilă că $LU = A$. Numim acest rezultat *descompunerea LU* a matricei A.

4.1 Aplicație: Sisteme liniare

Putem folosi descompunerea LU pentru a rezolva sisteme liniare. Să presupunem că pornim cu sistemul scris în forma matriceală $AX = B$. Atunci:

- Dată A, calculăm L și U, astfel încît $A = LU$. Sistemul devine $LUX = B$;
- Fie $Y = UX$ și atunci $LY = B$. Rezolvăm sistemul triunghiular pentru Y;
- Rezolvăm sistemul triunghiular $UX = Y$ pentru X.

Exemplu: rezolvăm sistemul scris în formă matriceală:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 13 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Mai întîi, găsim descompunerea LU a matricei A și obținem:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{și} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Acum rezolvăm sistemul $LY = B$, pentru vectorul-coloană Y. Așadar, considerăm:

$$LY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} = B.$$

Se obține $y_1 = 3, y_2 = 4, y_3 = -6$ și trecem la a rezolva $UX = Y$ pentru X. Se obține $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = -2$.

4.2 Pivotare

Trebuie adăugat faptul că nu întotdeauna o matrice are o descompunere LU. De fapt, condiția este următoarea:

Propoziţie 4.1: *O matrice A are o descompunere LU dacă și numai dacă toate sub-matricele pătrate care se formează din A sînt nesingulare.*

Astfel, dacă A este o matrice 3×3, de exemplu, ea are o descompunere LU dacă și numai dacă $a_{11} \neq 0$, precum și $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ *și* $\det A \neq 0$.

Dar dacă avem o matrice care nu admite o descompunere LU, putem să aplicăm transformări elementare și să obținem una care admite. În particular, putem inversa liniile sau coloanele matricei și obținem una care are descompunere LU.

Atunci cînd facem aceasta, transformările se înregistrează într-o așa-numită *matrice pivot*, care este obținută pornind de la matricea identitate și i se aplică transformările corespunzătoare. Astfel, dacă pentru a obține o matrice cu descompunere LU interschimbăm coloanele 2 și 3, matricea pivot este $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

În acest caz, se obține o descompunere de forma $PA = LU$.

5 Descompunerea Cholesky și LDU

Vom lucra acum cu matrice speciale, care au următoarea proprietate:

Definiţie 5.1: O matrice A se numește *simetrică* dacă $A = A^t$.

În cazul acestor matrice, descompunerea LU poate fi continuată și se poate extrage din matricea U o matrice diagonală. De exemplu:

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. Facem descompunerea LU și apoi continuăm, extrăgînd diagonala:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pentru a obține matricea diagonală, trebuie doar să punem laolaltă elementele de pe diagonala matricei U. Apoi, în matricea rămasă, elementele de pe diagonală se împart la cele date deoparte.

Să remarcăm că, datorită simetriei, noua matrice U este, de fapt, L^t. De aceea, în cazul matricelor simetrice, descompunerea are forma $A = LDL^t$.

Există un caz și mai simplu, însă, aplicabil într-un sub-caz al matricelor simetrice.

Definiţie 5.2: O matrice A se numește *pozitiv definită* dacă are o descompunere de forma $A = L \cdot L^t$.

Vom mai vedea pe parcurs alte moduri de a verifica dacă o matrice este pozitiv definită.

Deocamdată, să presupunem că matricea A are o asemenea descompunere. Vom descoperi modul în care se poate face această descompunere printr-o substituție inversă, adică pornind de la rezultat. Să presupunem, pentru simplitate, că lucrăm cu matrice 3×3:

$$
\begin{aligned}
A &= L \cdot L^t \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2 + c^2 & bd + ce \\ ad & bd + fe & d^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Acum, din aproape în aproape, egalînd această matrice de necunoscute cu o matrice A de la care pornim, găsim numerele a, b, c, d, e, f.

Această descompunere se numește *descompunerea Cholesky* și, asemenea celorlalte, este deja implementată în librăria standard a limbajelor și uneltelor de programare matematică comune: Mathematica, MATLAB, Maple, NumPy și altele.

6 Exerciții

- Exemple de relații;
- Exemple de structuri algebrice;
- Sisteme de ecuații liniare — toate cazurile;
- Metoda Gauss-Jordan pentru sisteme;
- Metoda Gauss-Jordan pentru inversarea unei matrice;
- Descompunere LU + sisteme și pivotare;
- Descompunere LDU și Cholesky.