Consultație
Ecuații și sisteme diferențiale

CUPRINS

Dacă nu se precizează altfel, vom presupune că lucrăm cu funcții de forma $y = y(x)$, deci y' va însemna $\frac{dy}{dx}$.

1 Ecuații cu variabile separabile/separate

Acesta este cel mai simplu exemplu de ecuații diferențiale și se rezolvă direct prin integrare, după o reordonare corespunzătoare.

Exemplu 1: $(1 + x^2)yy' + x(1 + y^2) = 0$, știind că $y(1) = 2$.

Soluție: Separăm variabilele și diferențialele și obținem succesiv:

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y \cdot \frac{dy}{dx} + x(1+y^2) = 0 \Leftrightarrow \\
(1+x^2)y\,dy &= -x(1+y^2)dx \Leftrightarrow \\
\frac{y}{1+y^2}dy &= -\frac{x}{1+x^2}dx \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2}\ln(y^2+1) &= -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.
\end{aligned}$$

Pentru uniformitate, putem pune $\frac{1}{2}\ln c$ în locul constantei.

Rezultă $1 + y^2 = \frac{c}{1+x^2}$, cu $c > 0$, pentru existența logaritmului.

Înlocuim în condiția inițială $y(1) = 2$ și obținem $c = 10$. În fine:

$$y(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}, \quad x \in (-3, 3),$$

punînd și condițiile de existență.

În unele cazuri, este util să facem schimbări de variabilă. De exemplu:

Exemplu 2: $y' = \sin^2(x - y)$.

Soluție: Notăm $x - y = z$ și avem că $y' = 1 - z'$, de unde, în ecuație, obținem succesiv:

$$\begin{aligned}
z' = 1 - \sin^2 z = \cos^2 z \Rightarrow \\
\frac{dz}{dx} &= \cos^2 z \Rightarrow \\
\frac{dz}{\cos^2 z} &= dx \Rightarrow \\
\tan z &= x + c \Rightarrow \\
\tan(x-y) &= x + c,
\end{aligned}$$

care poate fi prelucrată pentru a obține $y(x)$ sau lăsată în forma implicită.

2 Ecuații liniare

Forma generală a acestor ecuații este:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x).$$

Distingem două cazuri:

- Dacă $Q = 0$, atunci ecuația se numește *omogenă*;

- Dacă $Q \neq 0$, ecuația este *neomogenă*.

Metoda generală de rezolvare este să folosim formula:

$$y(x) = c \cdot \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} P(t)dt\Big),$$

pentru a obține o *soluție particulară pentru ecuația omogenă*. Apoi, din teorie, știm că putem folosi *metoda variației constantelor (Lagrange)* pentru a obține soluția ecuației neomogene. Pentru aceasta, în locul constantei c vom considera o funcție $c(x)$ și înlocuim în ecuația inițială.

Pe scurt, pentru ecuația liniară:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

avem:

- Soluția particulară pentru varianta omogenă $y_p = c \cdot \exp\Big(-\int P(x)dx\Big)$;
- Soluția generală (din Lagrange):

$$y_g = \exp\Big(-\int P(x)dx\Big) \cdot \Big(C + \int Q(x) \cdot \exp\Big(\int P(x)dx\Big)dx\Big)$$

Soluția generală a problemei este suma între soluția particulară și cea generală.

Exemplu 1: $y' + y\sin x = -\sin x \cos x$.

Soluție: Putem înlocui direct în formulă și obținem $y = C \cdot e^{\cos x} - \cos x - 1$.

Exemplu 2: $y' + xy = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Soluție: Asociem ecuația omogenă $y' + xy = 0$, pe care o rescriem:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Rightarrow y_p = ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Acum, folosind metoda lui Lagrange, căutăm o soluție de forma $y(x) = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Înlocuim în ecuația inițială și găsim $y' + xy = c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, dar, comparînd cu ecuația dată, găsim $c'(x) = x$, de unde $c(x) = \frac{x^2}{2}$.

Așadar, avem $y_g = \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$, iar soluția finală este suma celor două:

$$y = \Big(\frac{x^2}{2} + c\Big)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exemplu 3: $2xyy' + 2y^2 - x^4 = 0$.

Soluție: Putem face o substituție $y^2 = z$, cu care ecuația devine $z' + \frac{2}{x}z = x^3$. Avem, în acest caz, $P(x) = \frac{2}{x}$, iar $Q(x) = x^3$. Cum $\int P(x)dx = 2\ln x$, iar $\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = \frac{x^6}{6}$, obținem soluția generală:

$$y(x) = \frac{1}{x}\sqrt{c + \frac{x^6}{6}}, x > 0.$$

3 Ecuația Bernoulli

Forma generală a ecuației Bernoulli este:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}.$$

Remarcăm că:

- Dacă $\alpha = 0$, obținem o ecuație omogenă;
- Dacă $\alpha \neq 0$, obținem o ecuație neomogenă, ca în secțiunea anterioară.

Pașii de rezolvare sînt:

- Se împarte cu y^α și obținem:
$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x);$$
- Facem substituția $y^{1-\alpha} = z$ și ajungem la ecuația:
$$(1-\alpha)y^{1-\alpha} \cdot y' = z',$$
de unde $\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x)$, care este o ecuație neomogenă, rezolvabilă ca în secțiunea anterioară.

Exemplu 1: $y' - \frac{y}{3x} = \frac{1}{3}y^4 \ln x, x > 0$.
Soluție: Avem $\alpha = 4$, deci împărțim la y^4 și obținem:
$$y^{-4}y' - \frac{1}{3x}y^{-3} = \frac{1}{3}\ln x.$$

Cu substituția $z = y^{-3}$, ajungem la:
$$z' = -3y^4y' \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Avem $P(x) = \frac{1}{x}$ și $Q(x) = -\ln x$, deci putem aplica formula pentru soluția generală a ecuației neomogene:
$$z = e^{-\ln x}\Big(c - \int \ln x e^{\ln x} dx\Big) = \frac{1}{x}\Big(c - \int x \ln x\Big).$$

În fine:
$$y^{-3} = \frac{c}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2}\ln x, x > 0.$$

Exemplu 2: $y' + \frac{2}{3x}y = \frac{1}{3}y^2$.
Soluție: Avem $\alpha = 2$, deci împărțim la y^2 și ajungem la:
$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{3x}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Cu substituția $z = \frac{1}{y}$, avem $z' + \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3}$, care este liniară și neomogenă.

Lucrăm cu ecuația omogenă $z' + \frac{2}{3x} = 0$, de unde $\frac{z'}{z} = \frac{2}{3x}$, care este cu variabile separabile și găsim $z = cx^{\frac{2}{3}}$, *pentru ecuația omogenă*.

Aplicăm acum metoda variației constantelor și luăm $z = c(x)x^{\frac{2}{3}}$. După înlocuire în ecuația inițială, avem $c(x) = -x^{\frac{1}{3}}$.

Soluția finală este acum suma $z = -x + cx^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{y}$.

4 Ecuația Riccati

Forma generală este:
$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Observăm că:

- Dacă $Q = 0$, avem o ecuație liniară și neomogenă;

- Dacă $R = 0$, este o ecuație Bernoulli, cu $\alpha = 2$.

În general, ecuația Riccati se rezolvă știind o soluție particulară y_p. Apoi, folosind formula $y = y_p + z$ și înlocuind, se ajunge la o ecuație Bernoulli:

$$z' + \big(p(x) + 2q(x)y_p\big)z + q(x)z^2 = 0.$$

Pentru a găsi soluții particulare, următoarea teoremă ne ajută într-un anumit caz:

Teoremă 4.1: *Dacă avem ecuația Riccati de forma:*

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2},$$

unde $(B+1)^2 - 4AC \geqslant 0$, *atunci o soluție particulară este* $y_p = \frac{c}{x}$.

Exemplu 1: $y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2}, x > 0$.

Soluție: Aplicînd teorema, putem lua $y_p = \frac{1}{x}$ ca soluție particulară. Apoi căutăm o soluție generală de forma $y = \frac{1}{x} + z$, dar, pentru conveniență, putem lua $z \rightsquigarrow \frac{1}{z}$. Înlocuim în ecuație și obținem succesiv:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} &= -\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\Big) - \frac{2}{3x} \Rightarrow \\
z' - \frac{2}{3x}z &= \frac{1}{3} \Rightarrow \\
z &= Cx^{\frac{2}{3}} + x,
\end{aligned}$$

de unde $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{\frac{2}{3}} + x}$, cu $x > 0$.

5 Ecuația Clairaut

Forma generală a ecuației este:

$$y = xy' + \varphi(y').$$

Pentru rezolvare, se notează $y' = p$ și, înlocuind, avem:

$$y = xp + \varphi(p).$$

Derivăm după x și găsim:

$$p = p + x \cdot \frac{dp}{dx} + \varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx},$$

de unde $\big(x + \varphi'(p)\big)\frac{dp}{dx} = 0$.

Mai departe:

- Dacă $\frac{dp}{dx} = 0$, atunci $p = C$ și avem $y = C \cdot x + \varphi(c)$, ca soluție generală;
- Dacă $x + \varphi'(p) = 0$, obținem *soluția singulară*, care se prezintă parametric, adică în funcție de p, astfel:

$$\begin{cases} x &= -\varphi'(p) \\ y &= -p\varphi'(p) + \varphi(p) \end{cases}$$

Exemplu: $y = xy' - y'^2$.

Soluție: Notăm $y' = p$, deci $y = xp - p^2$.

Obținem, înlocuind în ecuație:

$$p dx + x dp - 2p dp = p dx \Rightarrow (x - 2p) dp = 0.$$

Distingem cazurile:

- Dacă $dp = 0$, atunci $p = C$ și $y = Cx - C_2$, o soluție particulară;
- Soluția singulară se reprezintă parametric, corespunzător cazului $x - 2p = 0$, prin:

$$\begin{cases} x &= 2p \\ y &= p^2 \end{cases}$$

Revenind la y, găsim $y = \frac{x^2}{4}$.

Observaţie 5.1: Geometric, soluția generală este *înfășurătoarea* soluției particulare, adică o curbă care aproximează, din aproape în aproape, dreapta soluției particulare.

6 Ecuații exacte. Factor integrant

Forma generală este:

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0.$$

Dacă are loc $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, atunci ecuația se numește *exactă*, iar soluția ei generală se prezintă prin:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt,$$

pentru orice (x,y) din domeniul de definiție, iar (x_0,y_0) un punct arbitrar fixat, în jurul căruia determinăm soluția.

Observaţie 6.1: Pentru simplitate, vom mai folosi notațiile $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$ și similar pentru Q_x. Deci condiția de exactitate se mai scrie, pe scurt, $P_y = Q_x$.

Exemplu: $(3x^2 - y) + (3y^2 - x)y' = 0$.

Soluție: Remarcăm că avem $P(x,y) = 3x^2 - x$ și $Q(x,y) = 3y^2 - x$, deci $P_y = Q_x = -1$, ecuația fiind exactă. Obținem direct, din formula pentru soluția generală:

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - xy + x_0y_0 - x_0^3 - y_0^3.$$

Cum (x_0,y_0) sînt fixate, putem prezenta soluția în *forma implicită* $y = \varphi$, unde $\varphi = x^3 + y^3 - xy = c$, constanta fiind expresia de (x_0,y_0) de mai sus.

Dacă ecuația nu este exactă, se caută *un factor integrant*, adică o funcție $\mu(x,y)$ cu care se înmulțește ecuația pentru a deveni exactă.

Există două cazuri particulare în care factorul integrant se găsește simplu:

- Dacă expresia $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ depinde doar de x, se poate lua $\mu = \mu(x)$;
- Dacă expresia $\frac{Q_x - P_y}{P}$ depinde doar de y, se poate lua $\mu = \mu(y)$.

În celelalte cazuri, factorul integrant, de obicei, se dă în enunțul problemei, deoarece este dificil de găsit, dar o teoremă de existență ne arată că el poate fi mereu găsit.

Observaţie 6.2: Pentru a reține mai ușor condițiile simple de căutare a factorului integrant, pornim cu ecuația în forma generală, înmulțim cu μ, ceea ce ne schimbă și P și Q, apoi scriem condiția de exactitate. Pentru primul caz, de exemplu, obținem:

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q},$$

deci dacă membrul drept depinde doar de x, putem lua $\mu = \mu(x)$ și similar în al doilea caz.

Odată găsit factorul integrant, să presupunem $\mu = \mu(x)$, integrăm condiția de exactitate și găsim:

$$\ln \mu(x) = \int \varphi(x) + c,$$

unde $\varphi(x) = \frac{P_y - Q_x}{Q}$ și deci $\mu(x) = \exp\Big(\int \varphi(x) dx \Big)$.

Exemplu: $(1 - x^2 y) + x^2(y - x)y' = 0$.

Soluție: Observăm că ecuația nu este exactă, dar verificînd condițiile pentru factorul integrant, putem lua $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Înmulțim ecuația cu μ și găsim:

$$\left(\frac{1}{x^2} - y \right) + (y - x)y' = 0,$$

care este exactă. Atunci putem scrie direct soluția generală:

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy + C,$$

soluția implicită fiind $\frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy = \text{const.}$.

Exercițiu: Rezolvați ecuația $y^2(2x - 3y) + (7 - 3xy^2)y' = 0$, căutînd (după verificare) un factor integrant $\mu(y)$.

7 Ecuația Lagrange

Forma generală a ecuației Lagrange este:

$$A(y') \cdot y + B(y') \cdot x + C(y') = 0.$$

Dacă avem $A(y') \neq 0$, putem împărți și obținem:

$$y = f(y') + g(y'), \quad f(y') = \frac{-B(y')}{A(y')}, g(y') = -\frac{C(y')}{A(y')}.$$

Dacă $f(y') = y'$, obținem o ecuație de tip Clairaut.

Altfel, fie $y' = p$, deci $dy = p dx$. Înlocuim în ecuația inițială și găsim:

$$y = xf(p) + g(p) \Rightarrow dy = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.$$

Egalăm cele două expresii pentru dy și ajungem la:

$$p dx = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp.$$

În fine:

$$\big(f(p) - p\big)dx + \big(xf'(p) + g'(p)\big)dp = 0.$$

În acest caz, dacă $f(p)$ este o constantă, obținem o ecuație cu variabile separabile.

Altfel, putem împărți la $(f(p) - p)dp$ și ajungem la:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x + \frac{g'(p)}{f(p) - p} = 0.$$

Aceasta este o ecuație liniară și neomogenă în $x(p)$ și o rezolvăm corespunzător.

Dacă $f(p) = p$, obținem o soluție particulară.

Exemplu: $y = x - \frac{4}{9}y'^2 + \frac{8}{27}y'^3$.
Soluție: Facem notația $y' = p$, deci $dy = p\,dx$. Obținem:

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3 \Rightarrow dy = dx - \frac{8}{9}p\,dp + \frac{8}{9}p^2 dp.$$

Rezultă $p\,dx = dx - \frac{8}{9}p\,dp + \frac{8}{9}p^2 dp$, deci:

$$(p-1)(dx - \frac{8}{9}p\,dp) = 0.$$

Distingem cazurile:
Dacă $dx = \frac{8}{9}p\,dp$, atunci $x = \frac{4}{9}p^2 + c$ și, înlocuind în ecuația inițială, găsim $y = \frac{8}{27}p^3 + c$. Soluția poate fi prezentată parametric:

$$\begin{cases} x &= \frac{4}{9}p^2 + c \\ y &= \frac{8}{27}p^3 + c \end{cases}$$

Dacă $p = 1$, avem o soluție particulară $y = x + c$, iar constanta se obține a fi $c = -\frac{4}{27}$, din ecuația inițială.

8 Sisteme diferențiale cu coeficienți constanți

Ca în cazul sistemelor de ecuații liniare, putem scrie un sistem în formă matriceală $X' = A \cdot X$, unde A este matricea coeficienților.

Distingem mai multe cazuri, în funcție de proprietățile matricei A.

Dacă A **se diagonalizează**, fie $\{\lambda_i\}$ valorile proprii ale sale, iar $\{u_i\}$ vectorii proprii asociați. Atunci funcțiile:

$$\{x_i(t) = e^{\lambda_i t} \cdot u_i\}_i$$

dau o bază în spațiul vectorial al soluțiilor. Soluția generală poate fi scrisă, atunci, ca o combinație liniară a acestora:

$$x(t) = \sum_i c_i x_i(t).$$

Se obișnuiește ca soluția să fie prezentată sub formă matriceală, alcătuind **matricea fundamentală** a sistemului: $X(t) = {}^t(e^{\lambda_i t} u_i)$.

Exemplu:

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= -4x + y. \end{cases}$$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Obținem $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 3$. Cum acestea au multiplicitatea algebrică egală cu 1, rezultă că matricea se diagonalizează. Se obțin subspații proprii de dimensiune 1, bazele fiind, de exemplu:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Atunci soluția generală se scrie:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Atunci matricea fundamentală se scrie:

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Dacă A **nu se diagonalizează**, fie $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valorile proprii, de multiplicități algebrice $n_1, \dots, n_k$. Atunci se caută soluții de forma:

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{k} P_{ij}(t) e^{\lambda_i t}, \quad \text{grad} P_{ij} \leqslant n_i - 1.$$

Înlocuim în ecuația inițială și găsim P_{ij}. Această metodă poartă numele de **metoda coeficienților nedeterminați**.

Exemplu:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Soluție: Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, care are valoarea proprie $\lambda = 1$, de multiplicitate algebrică 2. Se poate verifica faptul că matricea nu este diagonalizabilă și atunci căutăm soluții de forma:

$$\begin{cases} x_1(t) &= (A_1 + B_1 t) e^t \\ x_2(t) &= (A_2 + B_2 t) e^t \end{cases}$$

Înlocuim în sistem și obținem un sistem liniar cu necunoscutele A_1, A_2, B_1, B_2, care va fi dublu nedeterminat. Așadar, soluția se prezintă cu 2 parametri în forma:

$$(A_1, A_2, B_1, B_2) \in \{(\alpha, \alpha + \beta, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Rezultă că matricea fundamentală este:

$$X(t) = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta t) e^t \\ (\alpha + \beta + \beta t) e^t \end{pmatrix}$$

Dacă matricea A **nu se diagonalizează, iar** $\lambda_i \in \mathbb{C}$, lucrăm cu numere complexe.

Exemplu:

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + x_2 \\ x_2' &= -8x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

știind că soluția conține la $t = 0$ punctul $M_0(1, 0)$.

Soluție: Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$.

Valorile sale proprii sînt $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Atunci subspațiul invariant va fi:

$$V_{\lambda_1} = Sp\{(1, -2 + 2i)\}.$$

Obținem o soluție generală în forma:

$$x_1(t) = e^{2it}\begin{pmatrix}1\\-2+2i\end{pmatrix} = (\cos 2t + i\sin 2t)\begin{pmatrix}1\\-2+2i\end{pmatrix}.$$

Din proprietățile algebrice ale numerelor complexe, avem că $x_t(t) = \overline{x_1(t)}$ și atunci soluția generală va fi $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$.

Folosind condițiile inițiale, avem că $x_1(0) = 1$ și $x_2(0) = 0$, deci $c_1 = c_2 = 1$.

9 Exponențiale matriceale și sisteme folosind forma Jordan

Exemplu: Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

(a) Să se calculeze e^{At}, pentru $t \in \mathbb{R}$;

(b) Să se determine soluția generală a sistemului $X' = AX$, apoi soluția particulară care verifică condiția $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 0$.

Soluție:

(a) Matricea A are valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Vectorii proprii (baze în subspațiile invariante) sînt:

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,0,1).$$

Forma canonică Jordan a matricei se obține a fi:

$$J = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

folosind matricea de trecere

$$T = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Deci $A = TJT^{-1}$.

Știm din teorie că $e^{At} = T\cdot e^{Jt}\cdot T^{-1}$.

Folosim acum dezvoltarea în serie Taylor a funcției exponențiale:

$$e^x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{x}{n!},$$

adevărată și pentru matrice. În plus, dacă matricea este diagonală, exponențiala sa va conține exponențiala pe diagonală, adică, dacă $M = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, atunci $e^M = \operatorname{diag}(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$.

Pentru a folosi această proprietate, ne legăm de descompunerea în blocuri Jordan a lui A. Fie J_1 blocul Jordan de dimensiune 2, corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și J_2 blocul Jordan de dimensiune 1 corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 2$. Avem descompunerea pe blocuri și pentru exponențială:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix}e^{J_1t} & 0\\0 & e^{J_2t}\end{pmatrix}$$

Cum $e^{J_2 t} = e^{2t}$, calculăm celălalt bloc:

$$\begin{aligned}
e^{J_1 t} &= e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ t & t \end{pmatrix}} \\
&= e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Am folosit faptul că $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$, așadar din seria Taylor va fi suficient să păstrăm primii 2 termeni. Calculăm și T^{-1}, obținînd:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

găsim, în fine:

$$e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} e^t(t+2) - e^{2t} & e^t - e^{2t} & -e^t(t+2) + 2e^{2t} \\ te^t & e^t & -te^t \\ e^t(t+1) - e^{2t} & e^t - e^{2t} & -e^t(t+1) + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

(b) Conform teoriei, soluția generală a sistemului este:

$$X(t) = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

constantele C_i determinîndu-se din condițiile inițiale. În acest caz:

$$X(t) = e^{At} X(0) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplu 2: Să se determine soluția sistemului diferențial liniar neomogen:

$$\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= -x + 2z + e^t z \\ z' &= -y + 2, \end{cases}$$

știind că satisface condițiile inițiale $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soluție: Fie matricele:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci sistemul se scrie matriceal $X' = AX + B(t)$. Valorile proprii ale matricei A sînt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și $\lambda_3 = 2$. Avem vectorul propriu $(1, 1, 1)$ bază în $V_{\lambda_{1,2}}$ și vectorul $(2, 0, 1)$ bază în V_{λ_3}.

Aducem matricea A la forma canonică Jordan, folosind matricea de trecere:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Forma canonică Jordan se obține a fi:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Putem descompune matricea Jordan în două blocuri, unul de dimensiune 2 și unul de dimensiune 1, ceea ce ne ajută să calculăm:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - (t+1)e^t & -te^t & 2e^t(t+1) - 2e^{2t} \\ -te^t & (1-t)e^t & 2te^t \\ 2e^{2t} - (t+1)e^t & -te^t & 2e^t(t+1) - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Conform teoriei, obținem soluția problemei Cauchy (ținînd cont de valorile inițiale) sub forma:

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds.$$

Integrala se calculează integrînd fiecare din elementele matricei și obținem, în final:

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} -t - \frac{t^2}{2} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \\ -t - \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$