Seminar 7
Funcții de mai multe variabile.
Derivate parțiale

1 Derivate parțiale. Diferențială

Amintim următoarele noțiuni: Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție de n variabile.

- *Diferențiala (totală)* a lui f se definește prin:

$$Df(a)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i, \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

- *Diferențiala a doua* a lui f se definește prin:

$$D^2 f(a)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot dx_i dx_j, \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

- *Laplacianul* funcției f se definește prin:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Definiţie 1.1: O funcție se numește *armonică* dacă laplacianul său este nul.

2 Exerciții

1. Verificați dacă următoarele funcții sînt armonice:

(a) $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$;

(b) $f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

(c) $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(d) $f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

(e) $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;

(f) $f : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$;

2. Fie funcția:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Să se arate că f este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$;

(b) Să se arate că f are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea în orice punct și să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în origine. Este f de clasă $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{R}$?

3. Să se calculeze jacobienii transformărilor în coordonate polare, cilindrice și sferice:

$$\begin{cases} (x, y) &= (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi), (\rho, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \\ (x, y, z) &= (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z), (\rho, \varphi, z) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &= (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi), (\rho, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \end{cases}$$

4. Să se calculeze diferențialele funcțiilor:

(a) $f : \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid x = 0\}, f(x, y) = \arctan\frac{y}{x}$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid y = 0\}, g(x, y) = -\arctan\frac{x}{y}$.

5. Fie $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ și $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată de $g(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi și al doilea ale funcției g, precum și diferențiala acestei funcții.

6. Fie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + r^2}$ și fie $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Să se calculeze laplacianul funcțiilor $g(x, y, z) = f\left(\frac{1}{r}\right)$ și $h(x, y, z) = f(r)$.

7. Dacă $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ și $u(x, y) = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$, să se calculeze derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției u.

8. Fie $a \in \mathbb{R}$ și g, h două funcții de clasă $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{R}$. Să se arate că $f(x, y) = g(x - ay) + h(x + ay)$ verifică ecuația coardei vibrante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

9. Să se afle $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, știind că funcția $v(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ este armonică.

10. Să se arate că laplacianul în coordonate cilindrice este:

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Indicație: porniți cu definiția laplacianului în coordonate carteziene, apoi folosiți formula pentru derivarea funcțiilor compuse, ținînd cont de formulele de trecere în coordonate cilindrice. De exemplu, pentru a calcula $\frac{\partial f}{\partial\rho}$, folosiți $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial\rho}$ etc.

11. Să se arate că funcția $z(x, y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ verifică ecuația:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$