Seminar 4
Convergență absolută. Calculul sumelor seriilor

1. Studiați convergența absolută și semiconvergența seriilor cu termenul general x_n, dat de:

(a) $x_n = (-1)^{n+1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}$; (rădăcină $\Rightarrow 2\sin^2 x$, discuție, Leibniz);

(b) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha + \frac{1}{n}}}, \alpha \in \mathbb{R}$; (comparație 3 $\frac{1}{n^\alpha}$, discuție, Abel);

(c) $x_n = \frac{\cos n\alpha}{n^2}, \alpha \in \mathbb{R}$; (AC, comparație $\frac{1}{n^2}$);

(d) $x_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (SC).

2. Aproximați cu o eroare mai mică decît ε sumele seriilor definite de șirul x_n:

(a) $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}$; (R: $n = 7$);

(b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3\sqrt{n}}, \varepsilon = 10^{-2}$; (R: $n = 4$);

(c) $x_n = \frac{1}{n!}, \varepsilon = 10^{-3}$; (R: $n = 6$);

(d) $x_n = \frac{1}{n!2^n}, \varepsilon = 10^{-4}$; (R: $n = 5$);

3. Să se demonstreze convergența și să se determine sumele seriilor cu termenul general dat de:

(a) $x_n = \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$; (R: $\frac{1}{1+\alpha}$);

(b) $x_n = \frac{1}{16n^2-8n-3}$; (R: $\frac{1}{4}$);

(c) $x_n = \ln \frac{n+1}{n}$; (R: ∞).

4. Să se stabilească natura seriilor cu termenul general dat de:

(a) $x_n = \arcsin \frac{n+1}{2n+3}$; (D, necesar);

(b) $x_n = \frac{\ln n}{2n^3-1}$; (comparație $\frac{n}{n^3}$);

(c) $x_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}}$; (comparație 3 $\frac{1}{n}$);

(d) $x_n = e^{-n^2}$;

(e) $x_n = ne^{-n^2+n}$;

(f) $x_n = \frac{(an)^n}{n!}, a \in \mathbb{R}$; (C $a < \frac{1}{e}$);

(g) $x_n = \frac{a^n}{n!}, a > 0$; (Raabe);

(h) $x_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$; (Raabe);

(i) $x_n = \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}\right)^2$; (Raabe);

(j) $x_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^2}$; (C, logaritmic);

(k) $x_n = \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}}$; (C, logaritmic);

(l) $x_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3^n}$; (C, Leibniz);

(m) $x_n = \frac{\cos n \cdot \cos \frac{1}{n}}{n}$; (C, Abel).