Seminar 13b
Exerciții recapitulative

MODEL 1

1. Să se determine maximul și minimul funcției $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1$ pe mulțimea $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

2. Să se calculeze $\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(x+1)^2} dx$.

3. Să se calculeze integrala:

$$\iint_D 1 + \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 3 \leqslant 0, x \geqslant 0\}$.

4. Să se calculeze aria paraboloidului $z = x^2 + y^2, z \in [0, h]$.

5. Să se calculeze integrala de suprafață:

$$\int_\Sigma x^2 dy \wedge dz - 2xy dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy,$$

unde $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

MODEL 2

1. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:

$$f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9.$$

2. Să se studieze convergența integralei $\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 - 1}} dx$.

3. Să se calculeze fluxul cîmpului de vectori $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin suprafața de ecuație $z = x^2 + y^2, z \in [0, 5]$.

4. Fie $P, Q, R : \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, z \geqslant 0\} \to \mathbb{R}$, cu:

$$P = x^2 - yz + \frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$Q = y^2 - zx - \frac{x}{x^2 + y^2}$$
$$R = z^2 - xy.$$

Notăm $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Să se calculeze $\displaystyle\int_\Gamma \omega$, unde Γ este un drum parametrizat ce unește punctele $A(1,1,0)$ și $B(-1,1,0)$.

5. Să se calculeze, folosind formula Green-Riemann, integrala $\displaystyle\int_\Gamma xy\,dx + \frac{x^2}{2}dy$, pe mulțimea $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, unde:

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \leqslant 0 \leqslant y\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x,y) \mid x + y = -1, x \leqslant 0, y \leqslant 0\}.$$

MODEL 3

1. Să se calculeze punctele de extrem și valorile extreme pentru funcția:

$$f(x,y) = xy(x+y-2),$$

pe mulțimea $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leqslant 3, y \geqslant 0\}$.

2. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^1 \ln^p \frac{1}{x} dx, p > -1.$$

5. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$, pentru $\alpha = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, iar mulțimea $\Gamma : z = x^2 + y^2, z = 1$.

4. Fie $\vec{V} = (x^2 + y - 4)\vec{i} + 3xy\vec{j} + (2xz + z^2)\vec{k}$ și emisfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geqslant 0$.
Să se calculeze fluxul cîmpului $\nabla \times \vec{V} = \text{rot}\vec{V}$ prin Σ, orientată cu normala exterioară la sferă.

5. Fie $\alpha = \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$, unde Γ este triunghiul cu vîrfurile $A(0,3), B(0,0), C(4,0)$.