Seminar 13
Formule integrale

1 Formula Green-Riemann

Fie $(K, \partial K)$ un compact cu bord orientat inclus în $\mathbb{R}^2$ și considerăm o 1-formă diferențială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K. Atunci are loc *formula Green-Riemann*:

$$\int_{\partial K} P dx + Q dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

O consecință imediată este o formulă pentru arie:

$$\mathcal{A}(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} x dy - y dx.$$

2 Formula Gauss-Ostrogradski

Considerăm K o mulțime compactă, cu bord orientat după normala exterioară. Atunci, pentru orice 2-formă diferențială:

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui K are loc egalitatea:

$$\int_{\partial K} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_K \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

În notație vectorială, dacă $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ este cîmpul vectorial asociat 2-formei diferențiale ω, atunci formula de mai sus poate fi scrisă:

$$\int_{\partial K} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_K \operatorname{div}\vec{V} dx dy dz,$$

unde $\vec{n}$ este normala exterioară la ∂K. În membrul stîng avem fluxul cîmpului $\vec{V}$ prin suprafața ∂K, motiv pentru care formula Gauss-Ostrogradski se mai numește *formula flux-divergență*.

3 Formula lui Stokes

Fie Σ o suprafață cu bord, orientată și fie:

$$\alpha = P dx + Q dy + R dz$$

o 1-formă diferențială de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o vecinătate a lui Σ. Atunci are loc formula:

$$\int_{\partial \Sigma} P dx + Q dy + R dz = \int_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

În notație vectorială, dacă $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ este cîmpul vectorial asociat formei diferențiale α, atunci formula lui Stokes se scrie:

$$\int_{\partial \Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_\Sigma (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} d\sigma,$$

unde $\nabla \times \vec{V} = \operatorname{rot}\vec{V}$ se numește *rotorul* cîmpului vectorial $\vec{V}$, calculat cu ajutorul produsului vectorial.

4 Exerciții

1. Să se calculeze direct și folosind formula Green-Riemann integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$ în următoarele cazuri:

(a) $\alpha = y^2dx + xdy$, unde Γ este pătratul cu vîrfurile $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$;

(b) $\alpha = ydx + x^2dy$, unde Γ este cercul cu centrul în origine și rază 2;

(c) $\alpha = ydx - xdy$, unde Γ este elipsa de semiaxe a și b și de centru O.

2. Să se calculeze integralele, direct, apoi aplicînd formula Green-Riemann:

(a) $\displaystyle\int_\Gamma e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}(-ydx + xdy)$, unde $\Gamma = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$;

(b) $\displaystyle\int_\Gamma xydx + \frac{x^2}{2}dy$, unde Γ este obținută prin:

$$\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1, x \leqslant 0 \leqslant y\} \cup \{x + y = -1, x, y \leqslant 0\}.$$

3. Să se calculeze circulația cîmpului vectorial $\vec{V}$ pe curba Γ în cazurile:

(a) $\vec{V} = y^2\vec{i} + xy\vec{j}$, unde:

$$\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \cup \{y = x^2 - 1, y \leqslant 0\};$$

(b) $\vec{V} = e^x \cos y\vec{i} - e^x \sin y\vec{j}$, unde Γ este o curbă arbitrară din semiplanul superior, ce unește punctele $A(1,0), B(-1,0)$, cu sensul de la A către B.

4. Să se calculeze integrala de suprafață $\int_\Sigma \omega$ în următoarele cazuri:

(a) $\omega = x^2dy \wedge dz - 2xydz \wedge dx + z^3dx \wedge dy$, iar mulțimea $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$;

(b) $\omega = yzdy \wedge dz - (x+z)dz \wedge dx + (x^2 + y^2 + 3z)dx \wedge dy$, iar mulțimea:

$$\Sigma = \{x^2 + y^2 = 4 - 2z, z \geqslant 1\} \cup \{x^2 + y^2 \leqslant 4 - 2z, z = 1\};$$

(c) $\omega = x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z + z^2)dx \wedge dy$, iar mulțimea:

$$\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0\}.$$

5. Să se calculeze, folosind formula lui Stokes, integrala curbilinie $\int_\Gamma \alpha$, în următoarele cazuri:

(a) $\alpha = (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, iar mulțimea $\Gamma : z = x^2 + y^2, z = 1$;

(b) $\alpha = ydx + zdy + xdz$, iar mulțimea:

$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0.$$

6. Să se calculeze circulația cîmpului vectorial:

$$\vec{V} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k},$$

pe curba $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, ax + by + cz = 0$.