Seminar 12
Integrale de suprafață

1 Noțiuni teoretice

Integralele de suprafață sînt analogul celor curbilinii, dar, în locul unei curbe în lungul căreia se face integrarea, ne vom baza pe o suprafață din $\mathbb{R}^3$.

Tot ca în cazul integralelor curbilinii, integralele de suprafață sînt de două tipuri.

Integrala de suprafață de speța întîi are forma și se calculează după formula:

$$\iint_\Sigma \mathcal{F}(x, y, z) d\sigma = \iint_D \mathcal{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

unde Σ este suprafața pe care integrăm, care devine domeniul D după aplicarea formulei, cu elementul de arie $d\sigma$, care devine $du dv$, fiecare dintre cele trei coordonate x, y, z fiind parametrizate după u și v, iar coeficienții E, F, G se calculează astfel:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

O definiție alternativă este următoarea. Fie $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ o pînză parametrizată și fie $\Sigma = \Phi(D)$ imaginea ei, iar $F : U \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe imaginea pînzei. Integrala de suprafață a lui F pe Σ este, prin definiție:

$$\int_\Sigma F(x, y, z) d\sigma = \iint_D F(\Phi(u, v)) \cdot \left|\left|\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right|\right| du dv.$$

Într-un caz particular, în care suprafața regulată Σ este dată sub o formă explicită $z = f(x, y)$, cu $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, atunci formula se simplifică și devine:

$$\iint_\Sigma \mathcal{F}(x, y, z) d\sigma = \iint_D \mathcal{F}(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

unde coeficienții au forma simplificată:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Alte cazuri particulare sînt:

(a) Pentru $F = 1$, obținem *aria suprafeței* Σ;

(b) Dacă $F \geqslant 0$ este densitatea unei plăci Σ, atunci *masa ei* se calculează prin $M = \int_\Sigma F d\sigma$, iar *coordonatele centrului de greutate*: $x_i^G = \frac{1}{M} \int_\Sigma x_i F d\sigma$.

Într-o **interpretare vectorială**, putem considera $\vec{F}$ un cîmp vectorial, atunci *fluxul* său prin suprafața Σ este dat de o integrală de suprafață de prima speță, cu forma:

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

unde $\vec{n}$ este vectorul normal la suprafață, calculat prin $\vec{n} = \frac{\nabla F}{||\nabla F||}$, iar $d\sigma$ este elementul de suprafață.

Dacă avem cîmpul vectorial dat parametric, atunci formula pentru flux devine:

$$\Phi_\Sigma(\vec{F}) = \iint_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) dS,$$

unde $\vec{T}_u, \vec{T}_v$ sînt vectorii tangenți după cele două direcții, calculați ca derivatele parțiale F_u și F_v, iar dS este elementul de arie, adică $dudv$.

Pentru **integralele de suprafață de speța a doua**, considerăm o 2-formă diferențială:

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

și luăm o pînză parametrizată:

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)).$$

Integrala pe suprafața orientată Σ a formei diferențiale ω este definită prin:

$$\int_\Sigma \omega = \iint_D \left((P \circ \Phi) \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + (Q \circ \Phi) \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + (R \circ \Phi) \frac{D(X,Y)}{D(u,v)} \right) dudv,$$

unde $\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}$ etc. sînt jacobienii funcțiilor X, Y, Z în raport cu variabilele u, v.

Într-o formă simplificată, dacă privim $\vec{n} = \frac{\nabla \Phi}{||\nabla \Phi||}$, iar $\Phi = (X, Y, Z)$, atunci putem scrie:

$$\iint_\Sigma \omega = \iint_D \begin{vmatrix} P \circ \Phi & Q \circ \Phi & R \circ \Phi \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} dudv,$$

unde am folosit notația simplificată pentru derivate parțiale, i.e. $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ etc.

2 Exerciții

1. În fiecare din exemplele următoare, considerăm:

$$D \ni (u,v) \mapsto \Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$$

o pînză parametrizată. Să se calculeze vectorii tangenți la suprafață și versorul normalei la suprafață.

(a) *Sfera*: Fie $R > 0$ și $\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(\theta, \varphi) = (R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R \cos\theta);$$

(b) *Paraboloidul*: Fie $a > 0, h > 0$ și $\Phi : [0, h] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u,v) = (au \cos v, au \sin v u^2);$$

(c) *Elipsoidul*: Fie $a, b, c > 0$ și $\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(\theta, \varphi) = (a \sin\theta \cos\varphi, b \sin\theta \sin\varphi, c \cos\theta);$$

(d) *Conul*: Fie $h > 0, \Phi : [0, 2\pi) \times [0, h] \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u,v) = (v \cos u, v \sin u, v);$$

(e) *Cilindrul*: Fie $a > 0, 0 \leqslant h_1 \leqslant h_2, \Phi : [0, 2\pi) \times [h_1, h_2] \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(\varphi, z) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, z);$$

(f) *Torul*: Fie $0 < a < b, \Phi[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u).$$

(g) *Parametrizarea carteziană*: Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ și $f : D \to \mathbb{R}$, cu $f \in \mathcal{C}^1(D)$:

$$\Phi : D \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Indicație: Vectorii tangenți la suprafață sînt $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ și $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$, iar versorul normalei este:

$$\frac{1}{\left|\left|\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right|\right|} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}.$$

2. Fie $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ o 2-formă diferențială, iar Σ, imaginea unei pînze parametrizate. Să se calculeze integrala de suprafață $\int_\Sigma \omega$ în cazurile:

(a) $\omega = y dy \wedge dz + z dz \wedge dx + x dx \wedge dy$, unde:

$$\Sigma : \begin{cases} X(u, v) & = u\cos v \\ Y(u, v) & = u\sin v \\ Z(u, v) & = cv \end{cases}$$

cu domeniul $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi)$;

(b) $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, unde:

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$

(c) $\omega = yz dy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy$, unde:

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

(d) $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx$, unde:

$$\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, \quad z \in [1, 2];$$

(e) $\omega = (y + z) dy \wedge dz + (x + y) dx \wedge dy$, unde:

$$\Sigma : x^2 + y^2 = a^2, \quad a \in [0, 1]$$

3. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță:

$$\iint_\Sigma F(x, y, z) d\sigma$$

în următoarele cazuri:

(a) $F(x, y, z) = |xyz|$, iar $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1]$;

(b) $F(x, y, z) = y\sqrt{z}$, iar $\Sigma : x^2 + y^2 = 6z, z \in [0, 2]$;

(c) $F(x, y, z) = z^2$, iar $\Sigma = \{(x, y, z) \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 - 6y \leqslant 0\}$.

4. Folosind integralele de suprafață, să se calculeze ariile suprafețelor:

(a) sfera de rază R;

(b) conul $z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, h]$;

(c) paraboloidul $z = x^2 + y^2, z \in [0, h]$.

5. Să se calculeze aria suprafeței Σ în următoarele cazuri:

(a) $\Sigma : 2z = 4 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]$;

(b) Σ este submulțimea de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, situată în interiorul conului $x^2 + y^2 = z^2$, în semispațiul $z \geqslant 0$;

(c) Σ este submulțimea de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - Ry = 0$;

(d) Σ este submulțimea de pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 2y$.

6. Să se calculeze fluxul cîmpului vectorial $\vec{V}$ prin suprafața Σ în următoarele cazuri:

(a) $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, iar $\Sigma : z^2 = x^2 + y^2$, cu $z \in [0, 1]$;

(b) $\vec{V} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$, iar $\Sigma : z = x^2 + y^2$, cu $z \in [0, 1]$;

(c) $\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k})$, iar $\Sigma : z = 4 - x^2 - y^2, z \in [0, 1]$.