Seminar 10
Integrale duble și triple

1 Măsură și integrală Lebesgue

Ideea integrării în mai multe dimensiuni pornește cu o redefinire a conceptului de *măsură*. Dacă în plan, integrala Riemann permitea calculul de lungimi, arii și volume pentru funcții de o variabilă, într-un spațiu multidimensional, este necesară adaptarea măsurii respective, i.e. a funcției cu ajutorul căreia exprimăm "cantități măsurabile". Acestea vor fi generalizări ale conceptelor de tip *lungime, arie, volum*, în sensul că, în cazul particular al două sau trei dimensiuni, vor coincide cu intuiția geometrică.

Fără a intra în detalii suplimentare, menționăm că măsura care se utilizează în acest caz, al problemelor din $\mathbb{R}^n$, se numește **măsura Lebesgue**.

În particular, *elementul de lungime* față de măsura Lebesgue, va fi notat dl sau dx, *elementul de arie*, cu $dA = dxdy$, iar elementul de volum, $dV = dxdydz$ (sau corespunzător unor eventuale schimbări de coordonate).

Față de măsura Lebesgue, putem defini *integrala Lebesgue* din $\mathbb{R}^k$, pe o submulțime $A \subseteq \mathbb{R}^k$, pe care o vom nota prin:

$$\int_A f(x_1, \ldots, x_k) dx_1 dx_2 \cdots dx_k.$$

În cazurile particulare $k = 1, 2, 3$, vom folosi notațiile uzuale:

$$\int_A f(x)dx, \quad \iint_A f(x,y)dxdy, \quad \iiint_A f(x,y,z)dxdydz.$$

Următorul rezultat ne arată că putem inversa ordinea de integrare:

Teoremă 1.1 (Fubini)**:** *Fie $(x, y) \in \mathbb{R}^{k+p}$ un punct oarecare, notăm măsura Lebesgue din $\mathbb{R}^k$ cu dx, măsura Lebesgue din $\mathbb{R}^p$ cu dy, iar măsura Lebesgue din $\mathbb{R}^{k+p}$ cu $dxdy$.*

Fie $f : \mathbb{R}^{k+p} \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Lebesgue. Atunci are loc:

$$\int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dy \Big) dx = \iint_{\mathbb{R}^{k+p}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dx \Big) dy.$$

Următoarele aplicații ale teoremei vor fi utile în exerciții.

(1) Fie $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcții continue astfel încît $\varphi \leqslant \psi$ și fie mulțimea:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}.$$

Fie $f : K \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f este integrabilă Lebesgue pe K și are loc:

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \Big) dx.$$

În particular, putem calcula *aria mulțimi* K cu funcția identitate:

$$\mu(K) = \iint_K dxdy = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx.$$

(2) Fie acum $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime compactă și fie $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ două funcții continue, cu $\varphi \leqslant \psi$. Considerăm mulțimea:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, \varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\}.$$

Fie $f : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f este integrabilă Lebesgue pe Ω și are loc:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

În particular, putem calcula *volumul mulțimii* Ω cu funcția identitate:

$$\mu(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \iint_D (\psi(x,y) - \varphi(x,y))dxdy.$$

Atunci cînd vrem să calculăm o integrală cu *metoda schimbării de variabile*, teorema următoare ne arată procedura:

Teoremă 1.2 (Schimbare de variabile)**:** *Fie* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *o mulțime deschisă și fie* φ *un* difeomorfism [1] *al lui* A. *Pentru orice funcție continuă* $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$, *are loc:*

$$\int_{\varphi(A)} f(x)dx = \int_A (f \circ \varphi)(y) \cdot |J_\varphi(y)|dy,$$

unde J_φ *este jacobianul difeomorfismului* φ.

2 Exerciții

1. Să se calculeze următoarele integrale duble:

(a) $\displaystyle\iint_D xy^2 dxdy$, unde $D = [0,1] \times [2,3]$;

(b) $\displaystyle\iint_D xydxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,1], y^2 \leqslant x \leqslant y\}$;

(c) $\displaystyle\iint_D ydxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Indicații: Integralele duble se pot gîndi ca *integrale succesive*, adică:

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_0^1 \int_2^3 xy^2 dydx = \int_0^1 \left(\int_2^3 xy^2 dy \right) dx.$$

2. Să se calculeze integralele duble:

(a) $\displaystyle\iint_D (x+3y)dxdy$, unde D este mulțimea plană mărginită de curbele de ecuații:

$$y = x^2 + 1, \quad y = -x^2, \quad x = -1, \quad x = 3.$$

(b) $\displaystyle\iint_D e^{|x+y|}dxdy$, unde D este mulțimea plană mărginită de curbele de ecuații:

$$x + y = 3, \quad x + y = -3, \quad y = 0, \quad y = 3.$$

(c) $\displaystyle\iint_D xdxdy$, unde D este mulțimea plană mărginită de:

$$x^2 + y^2 = 9, \quad x \geqslant 0.$$

[1] aplicație continuă și bijectivă, cu inversa continuă

Indicații:

(a) $\iint_D (x+3y)dxdy = \int_{-1}^{3} dx \int_{-x^2}^{x^2+1} (x+3y)dy;$

(b) Pentru explicitarea modulului, considerăm $D_1 = \{(x,y) \in D \mid x+y \leqslant 0\}$ și $D_2 = D - D_1$. Atunci avem:

$$\begin{aligned}\iint_D e^{|x+y|}dxdy &= \iint_{D_1} e^{-x-y}dxdy + \iint_{D_2} e^{x+y}dxdy \\ &= \int_0^3 dy \int_{-3-y}^{-y} e^{-x-y}dx + \int_0^3 dy \int_{-y}^{3-y} e^{x+y}dx.\end{aligned}$$

(c) $\iint_D xdxdy = \int_{-3}^{3} dy \int_0^{\sqrt{9-y^2}} xdx.$

3. Folosind coordonatele polare, să se calculeze:

(a) $\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$;

(b) $\iint_D \left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, pe mulțimea:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-y \leqslant 0, x \geqslant 0\}.$$

(c) $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, unde D este mărginit de:

$$x^2+y^2 = e^2, \quad y = x\sqrt{3}, \quad x = y\sqrt{3}, \quad x \geqslant 0.$$

Indicație: Coordonatele polare sînt $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, jacobianul este r, iar domeniul maxim de definiție este:

$$(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi).$$

(b) Obținem restricții suplimentare pentru domeniu, din:

$$r \leqslant \sin\theta, \quad \cos\theta \geqslant 0 \Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad r \in [0, \sin\theta].$$

4. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ și $f : D \to [0,\infty)$. Să se calculeze volumul mulțimii:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\},$$

în următoarele cazuri:

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 2y\}, f(x,y) = x^2+y^2$;

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant x, y > 0\}, f(x,y) = xy$;

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 2x+2y-1\}, f(x,y) = y$.

Indicație: $\mu(\Omega) = \iint_D f(x,y)dxdy$. Folosiți coordonate polare.

5. Să se calculeze ariile mulțimilor plane D mărginite de curbele de ecuații:

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa), cu $a, b > 0$;

(b) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x > 0, a > 0$;

(c) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (lemniscata lui Bernoulli) [2], cu $a > 0$.

Indicație: $\mu(D) = \iint_D dxdy$. Folosiți coordonate polare.

[2] [wiki]